CLAUSURA DE POLINOMIOS Y SUBESPACIOS INVARIANTES EN $L^p(\mu)$

J.J. Guadalupe
Colegio Universitario
Logroño

M.L. Rezola
Dpto. Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

1.- Sea μ una medida finita y positiva sobre la circunferencia unidad T, $\mu = \mu_c + \mu_s = w d\theta + \mu_s$ su descomposición de Lebesgue y designemos por $H^p(\mu)$, la clausura en $L^p(\mu)$ de los polinomios analíticos $P(e^{i\theta}) = \sum_0^n a_k e^{ik\theta}$.

La primera cuestión que surge es si la inclusión de $H^p(\mu)$ en $L^p(\mu)$ es estricta. Este problema para $p = 2$ fue históricamente planteado y resuelto por Szegö ([20],[21]) en el caso de una medida absolutamente continua respecto a la de Lebesgue, extendido por Kolmogorov [12], Krein [14], y otros [19].

El grupo de investigación que dirige el Prof. Vigil ha prestado especial interés a esta cuestión; así, en [1], se obtienen caracterizaciones geométrico-funcionales, en [3] y [15] se aborda este estudio en lemniscatas y curvas equipotenciales racionales y en [6], $1 < p < \infty$, se obtienen entre otras, las siguientes condiciones equivalentes:

i) $\log w \in L^1(T)$; ii) $K_p \neq 0$;

iii) $\lim_{n\to\infty} e_n > 0$

donde $1-K_p$ es el vector de mejor aproximación de la función 1 en el subespacio $e^{i\theta}H^p(\mu)$ y e_n son los excesos de la matriz de momentos de Toeplitz tratados en [22].

Una extensión actual de este estudio, corresponde al caso de curvas rectificables de Jordan con un peso w definido sobre ella. En concreto, si la curva es arco-cuerda (existe una constante C tal que $\forall M_1, M_2 \in \Gamma$, $\widehat{M_1M_2} = C\, M_1M_2$), puede verse [7] que una condición suficiente para que

$H^p(\Gamma,w) \subset L^p(\Gamma,w)$ estrictamente es que $\log w \in L^q(\Gamma,ds)$ para algún $q > 1$. Una cuestión de interés, es determinar el mejor q que verifica dicha condición (parece natural que esté relacionado con la constante arco-cuerda), así como extender el planteamiento a dominios más generales (dominios de Smirnov).

2.- Por otra parte, $H^p(\mu)$ puede ser considerado como un subespacio invariante en $L^p(\mu)$ por el operador desplazamiento S, que se define por $S(f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$. Como en la teoría clásica, un subespacio M de $L^p(\mu)$ se llama invariante si $S(M) \subset M$, doblemente invariante si $S(M) = M$ y simplemente invariante si es invariante pero no doblemente invariante ($S(M) \subset M$ estrictamente). El problema de determinar los subespacios invariantes fue resuelto por Beurling [2] para la medida de Lebesgue:

i) M es doblemente invariante en $L^2(T)$ si y sólo si $M = \chi_E L^2(T)$ para algún conjunto de Borel E.

ii) M es simplemente invariante en $L^2(T)$ si y sólo si $M = uH^2$, donde u es interna y está determinada salvo factores constantes de módulo uno.

Estos resultados se extienden en [6] para $1 < p < \infty$ y μ arbitraria:

i') $M = e^{i\theta}M$ equivale a que $M = \chi_E\, L^p(\mu)$

ii') $e^{i\theta}M \subsetneq M$ si y sólo si $M = qH^p(T) \oplus \chi_E\, L^p(\mu_s)$

donde $H^p(T)$ es el espacio de Hardy clásico, E es un subconjunto medible del soporte de μ_s y $q \in L^p_c(\mu)$ verifica $|q|^p w = 1$ a.e. El conjunto E es único excepto para conjuntos μ_s-nulos y q está determinada por el subespacio salvo factores constantes de módulo uno.

Este resultado permite una descripción de las funciones de $H^p(\mu)$, $0 < p < \infty$, que viene dada por:

$$H^p(\mu) = K_p H^p(T) \oplus L^p(\mu_s)$$

que generaliza el teorema de Szegö clásico [10] donde $1-K_p$ es un vector de mejor aproximación de la función 1 en el subespacio $e^{i\theta}H^p(\mu)$, y tal que si $p \geq 1$ dicho vector es único. El p-núcleo K_p está caracterizado por las tres condiciones:

i) $1-K_p \in e^{i\theta}H^p(\mu)$

ii) $|K_p|^p d\mu = c d\theta$ siendo $c = \exp \int \log w$

iii) $1/K_p \in H^p(T)$

y cuya expresión explícita es: $K_p = (\frac{w}{c})^{-1/p} \exp\left[\frac{-i}{p}(\log \frac{w}{c})^{\sim}\right]$ $0 < p < \infty$, donde $\sim$ denota la función conjugada.

En el contexto señalado al comienzo de curvas arco-cuerda, se tiene una descomposición similar $H^p(\Gamma,w) = K\, H^p(\Gamma,ds)$ donde K es obtenido también como vector de mejor aproximación [7] .

Una descripción de los subespacios simplemente invariantes en $L^p(\mu)$ y $H^p(\mu)$ para $0 < p < \infty$ se encuentra en [9] para el caso de una medida absolutamente continua. Los subespacios simplemente invariantes de $L^p(\mu)$, (respectivamente de $H^p(\mu)$) son de la forma $M = uH^p(\mu)$ donde $u \in L^p(\mu)$ y $|u| = 1$ a.e. (respectivamente, u es interna). En esta situación se obtienen, como casos particulares, los resultados de Beurling y Srinivasan-Wang ([13] , pág.110) sobre aritmética de funciones internas.

3.- En otro sentido, $H^p(\mu)$ $1 < p < \infty$ puede ser estudiado desde una perspectiva de relación con el espacio de Hardy clásico $H^p(T)$, comprobando cómo se transforman o conservan algunos resultados de éste (bases, dual, factorizaciones, coeficientes de Fourier, etc.) y en qué manera dependen de la medida μ . En esta línea, en [18] se obtienen algunos resultados para un peso w en la clase A_∞ y en [8] , el estudio es ampliado para el caso de una medida con condición más débil para el peso ($\log w \in L^1$) . Se tiene:

i) $H^r(\mu) = H^p(\mu).H^q(\mu)$ $(\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; $p,q,r > 0)$ con factorización exacta.

ii) $\{K_p e^{in\theta}\}_0^\infty$ es base de Schauder para $H^p(\mu)$ $(d\mu = w d\theta)$

iii) El dual de $H^p(\mu)$ es isomorfo a $H^{p'}(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, por medio de la correspondencia que envía cada función $g \in H^{p'}(\mu)$ al funcional $\varphi_g(f) = \int f\bar{g}\alpha_p d\mu$ donde

$$\alpha_p(\theta) = \exp\left[(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})i(\log \frac{w}{c})^{\sim}(\theta)\right] \quad \mu_c\text{-a.e.}$$

$$\alpha_p(\theta) = 1 \qquad \mu_s\text{-a.e.}$$

iv) Una función $f \in L^p(\mu)$ está en $H^p(\mu)$ si y sólo si $\varphi_{e^{in\theta}}(f) = 0$ para todo $n < 0$ $(d\mu = wd\theta)$.

4.- Los subespacios cerrados de $L^p(\mu)$ simple y doblemente invariantes por el operador desplazamiento S , pueden ser tratados en un contexto más general, el de subespacios cerrados de $L^p(X,\mu)$, con $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida σ-finito, invariantes por multiplicación por una familia H de funciones medibles esencialmente acotadas; familia autoconjugada en el caso de subespacios doblemente invariantes y no autoconjugada en el caso de simplemente invariantes. La descripción respectiva que se obtiene en [17] depende esencialmente de la mínima σ-álgebra engendrada por H , designada por $\sigma(H)$.

Si $\sigma(H)$ es una subσ-álgebra σ-finita de $\mathcal{A}$ y M es un subespacio cerrado de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, se tiene: M es doblemente invariante si y sólo si existe una familia $(g_i)_{i\in I} \in L^{p'}(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, tal que

$$M = \bigcap_{i\in I} \{f \in L^p(\mu) \ ; \ E_{\sigma(H)}(fg_i) = 0 \quad \text{a.e.}\}$$

donde $E_{\sigma(H)}$ denota el operador esperanza condicional respecto de $\sigma(H)$. Si $p = \infty$, el resultado es válido, considerando en $L^\infty(\mu)$ la topología $*$-débil y M un subespacio $*$-débilmente cerrado.

Casos extremos, según la σ-álgebra $\sigma(H)$, importantes a destacar son:

a) Si $\sigma(H) = \mathcal{A}$ (o equivalente, es decir, $\sigma(H)$ y tienen la misma μ-complección) entonces:

M es doblemente invariante si y sólo si
$M = \chi_{\mathrm{sop}\, M}\, L^p(\mu)$

siendo sop M el mayor conjunto medible fuera del cual se anulan todas las funciones de M .

Este resultado engloba los ya citados con anterioridad referentes a subespacios doblemente invariantes.

b) Si $\sigma(H)$ es la σ-álgebra trivial y μ es una medida finita, se obtiene una forma del teorema de Hahn-Banach: "Todo subespacio cerrado viene caracterizado como intersección de todos los hiperplanos cerrados que lo contienen".

Para $p = 2$, el operador multiplicación por $e^{2\pi int}$ es una representación concreta del operador desplazamiento de multiplicidad n . Puede obtenerse: M es un subespacio cerrado de $L^2([0,1))$ invariante por $\{e^{2\pi int}, e^{-2\pi int}\}$ si y sólo si

$$M = \{f \in L^2;\ \sum_{j=1}^{n} f(t+\frac{j-1}{n})h_k(t+\frac{j-1}{n}) = 0 \quad \text{a.e. } t\}$$

donde h_k , $1 \leq k \leq n$, son funciones fijadas de $L^2([0,1))$.

En el caso del operador desplazamiento de multiplicidad numerable, los subespacios doblemente invariantes pueden describirse de forma análoga.

Otras caracterizaciones de estos subespacios pueden verse en [16] .

El estudio anterior se puede extender a espacios de Banach de funciones, más generales que $L^p(\mu)$, cuya norma depende exclusivamente de la función de distribución (espacios invariantes por reordenamiento) entre los cuales podemos citar espacios de Orlicz, espacios de Lorentz $L_{p,q}$, espacios L^p con norma mixta, etc.

5.- La descripción de los subespacios cerrados de $L^p(\mu)$, simplemente invariantes, designando así a los invariantes por multiplicación por $H \subset L^\infty(\mu)$ y no por $\overline{H}$, plan teado en toda la generalidad permanece abierto y ya la caracterización dada por Beurling en el caso clásico, da idea de la complejidad de su solución.

Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finita y la familia H consta de una única función φ de módulo constante, se obtiene en [17] una descripción de los subespacios cerrados simplemente invariantes de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, análoga a la del caso de subespacios doblemente invariantes. La existencia de dichos subespacios puede ser dada en términos exclusivos de φ y μ . Son equivalentes:

i) Existe un subespacio cerrado M de $L^p(\mu)$ tal que $\varphi M \subsetneq M$.

ii) Existe una medida de probabilidad ν en $\mathcal{A}$ tal que ν es absolutamente continua respecto de μ $(\nu << \mu)$ y la medida imagen por φ de ν es la medida de Lebesgue en T $(\varphi(\nu) = m)$. Además ν es única en $\sigma(\varphi)$.

Denotando por w_o el peso de la parte absolutamente continua de la medida $\varphi(\mu)$ respecto de la medida de Lebesgue y por $H^p(\mu)$, la clausura en $L^p(\mu)$ de los polinomios en φ , son equivalentes:

i) $H^p(\mu) \neq L^p(X, \sigma(\varphi), \mu)$

ii) $\log w_o \in L^1(T)$

iii) $1 \notin \overline{\text{span}\,\{\varphi^k ; k \geq 1\}}_{L^p(\mu)}$

Estas condiciones son suficientes pero no necesarias para la existencia de subespacios simplemente invariantes.

Si $\sigma(\varphi) = \mathcal{A}$ (o bien $\sigma(\varphi)$ y $\mathcal{A}$ son equivalentes) y M es un subespacio cerrado simplemente invariante de $L^p(\mu)$ se obtiene, cuando $\log w_o \in L'(T)$ ([17]) , una forma explícita de M en la que aparecen unos espacios "análogos" a los espacios de Hardy. En concreto:

$\varphi M \subsetneq M$ si y sólo si existe $A \in \mathcal{A}$ y $q \in L^p(\mu_c)$ con $|q|^p (w \circ \varphi) = 1$ a.e.

tal que

$$M = qH^p(\nu) \oplus \chi_A L^p(\mu_s)$$

siendo la función q única salvo constantes de módulo uno y $H^p(\nu) = \overline{\text{span}\,\{\varphi^k; k \geq 0\}}_{L^p(\nu)}$ comprobando que coincide con el anulador de $\{\varphi^k; k \geq 1\}$.

Por simple aplicación de la caracterización anterior obtenemos la siguiente versión abstracta del teorema de Szegö

$$H^p(\mu) = K_p . H^p(\nu) \oplus L^p(\mu_s)$$

donde $1-K_p$ es el vector de mejor aproximación de 1 en el subespacio $\varphi H^p(\mu)$, que permite describir los subespacios cerrados simplemente invariantes en términos exclusivos de la medida μ.

Este estudio puede prolongarse en el sentido de extender los resultados anteriores al caso en que la función φ no tenga módulo constante, o bien, $|\varphi| = \text{cte}$ y la σ-álgebra engendrada por φ no sea la total. Entre las aplicaciones de este último problema está la caracterización de los subespacios simplemente invariantes en el caso de curvas $|A(z)| = \text{cte}$, citadas al comienzo, donde A es una función racional.

6.- Es conocido, que existe un isomorfismo entre la clausura de los polinomios analíticos en $L^p(T)$ y el espacio de Hardy clásico $H^p(T)$. Más en general, en el caso de curvas rectificables de Jordan: Si Ω es un dominio de Jordan con frontera rectificable Γ, φ la transformación conforme del disco en Ω y con $H^p(\Omega)$ se denota el espacio de las funciones analíticas en Ω tales que $\sup_{r<1} \int_{\Gamma_r} |f|^p ds < \infty$ donde Γ_r es la imagen por φ de $|z| = r$, entonces $H^p(\Omega)$ coincide con la clausura en $L^p(\Gamma)$ de los polinomios analíticos si y sólo si Ω es un dominio de Smirnov (φ' es una función externa), [4]. En particular dicha correspondencia existe si Γ es arco-cuerda.

Parece natural tratar de extender este resultado al caso en que sobre la curva se dé un peso w definiendo $H^p(\Omega,wds)$ de manera análoga a la anterior, tomando ahora la medida wds . Kenig , en [11] , ha resuelto satisfactoriamente este problema en el caso de ser Ω un dominio de Lipschitz, probando que si $w \in A_\infty$ existe una correspondencia entre $H^p(\Omega,wds)$ y $H^p(\Gamma,wds)$ con equivalencia de normas. Si la curva Γ es arco-cuerda, con condiciones más débiles para el peso (por ejemplo, $\log w \in L^q(\Gamma,ds)$ con $q > 1$) puede obtenerse una inclusión continua de $H^p(\Omega, wds)$ en $H^p(\Gamma,wds)$, que es isomorfismo si w está en A_∞ [7] .

Permanece abierto el estudio de encontrar condiciones más generales para el peso que conserven dicho isomorfismo, así como el desarrollo de una teoría análoga a la del disco.

Bibliografía

[1] M.P. ALFARO, "Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Estudio del caso C ". Tesis doctoral. Departamento de Teoría de Funciones. Fac. de Ciencias. Zaragoza.

[2] A. BEURLING, Acta Math., 81 (1949), 239-255.

[3] C. BOADA, F. MARCELLAN, Actas V Jornadas Luso-Españolas de Matemática (Aveiro, 1978), vol. I (1982) 258-271.

[4] P.L. DUREN, "Theory of H^p spaces". Academic Press, 1970.

[5] G. FREUD, "Orthogonal polynomials". Pergamon Press, 1966.

[6] J. GUADALUPE, "Clausura en $L^p(\mu)$ de los polinomios analíticos sobre la circunferencia unidad". Tesis Doctoral. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Zaragoza, 1980.

[7] J. GUADALUPE, M. L. REZOLA, En Preparación.

[8] J. GUADALUPE, Bolletino U.M.I. (6) 1-B (1982), 1067-1077.

[9] J. GUADALUPE, Rev. Acad. Ciencias, Zaragoza, 37 (1982) pp. 11-14.

[10] K. HOFFMAN, "Banach spaces of analitic functions". Prentice Hall, 1962.

[11] C. KENIG, American Journal of Mathematics, vol. 102, No. 1, pp. 129-163 (1980).

[12] A.N. KOLMOGOROV, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh., 2,6 (1941), 40 pp.

[13] P. KOOSIS, "Introducción to H^p spaces", Cambridge University Press, 1980.

[14] M.G. KREIN, Dokl. Akad. Nank SSSR, 46 (95), (1945), 91-94.

[15] L. MORAL, "Polinomios ortogonales sobre curvas equipotenciales racionales". Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1983.

[16] H. RADJAVI, P. ROSENTHAL, "Invariant subspaces", Springer (1973).

[17] M.L. REZOLA, "Subespacios invariantes y aproximación en espacios de funciones medibles", Tesis Doctoral, Secretariado de Publicaciones. Universidad de Zaragoza. 1982.

[18] R. ROCHBERG, Indiana. Univ. Math. J. vol. 26, No 2 (1977), pp. 291-198.

[19] W. RUDIN, "Fourier analysis on groups". Interscience Publishers, 1967.

[20] G. SZEGÖ, Math. Ann., 84 (1921), 223-244.

[21] G. SZEGÖ, "Orthogonal Polynomials", Am. Math. Soc. Colloquium Publications. Vol. XXIII, Stanford, 1966.

[22] L. VIGIL, Rev. Acad. Ci. Madrid 63(1969), 11-32.