M. LUISA REZOLA (ZARAGOZA)

SUBESPACIOS INVARIANTES EN $L^p(\mu)$

Sommaire.- Dans cet article on décrit les sousespaces fermés de $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \leq p < +\infty$ invariants par multiplication selon une famille H de fonctions mesurables essentiellement bornées. On obtient cette représentation comme une intersection de certains sousespaces qui sont construits à travers l'espérance conditionnelle relative à la plus petite σ-algèbre pour laquelle les fonctions de H sont mesurables.

En lo sucesivo $(X,\mathcal{A},\mu)$ será un espacio de medida σ-finito y representaremos por $L^p(\mu)$ el espacio $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, pudiendo tomar las funciones de $L^p(\mu)$ valores reales o complejos. Llamaremos H a un subconjunto de $L^\infty(\mu)$ que supondremos autoconjugado en el caso de que se consideren funciones con valores complejos. Por $\sigma(H)$ entenderemos la mínima subσ-álgebra de $\mathcal{A}$ que hace medibles las funciones de H. Si S es un subespacio de $L^p(\mu)$, diremos que es H-invariante si es invariante por multiplicación por las funciones de H. Por último si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra contenida en $\mathcal{A}$ y el espacio $(X,\mathcal{F},\mu)$ es σ-finito $E_{\mathcal{F}}:L^1(X,\mathcal{A},\mu) \longrightarrow L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ denotará el operador esperanza condicional respecto de $\mathcal{F}$.

TEOREMA 1. Sea S un subespacio propio de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$ y $H \subset L^\infty(\mu)$ tal que el espacio de medida $(X,\mathcal{F},\mu)$ sea σ-finito con $\mathcal{F} = \sigma(H)$, entonces:

S es cerrado y H-invariante si y sólo si S es intersección de subespacios Sg de la forma $Sg = \{f \in L^p(\mu) \mid E_{\mathcal{F}}(fg) = 0\}$ con $g \in L^{p'}(\mu)$, siendo p' el conjugado de p $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

Con anterioridad a su demostración veamos cómo dos casos particulares (casos extremos en cierto modo, del teorema) son resultados ya conocidos:

a) Si $H = \{1\}$, entonces $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra trivial. Si $\mu(X) = 1$, entonces $E_{\mathfrak{F}}(f) = \int_X f d\mu$, por lo que tenemos

COROLARIO 1. Un subespacio propio S de $L^p(\mu)$ con $\mu(X) < +\infty$ y $1 \leq p < +\infty$ es cerrado si y sólo si es intersección de subespacios Ker g siendo Ker g $= \{f \in L^{p'}(\mu) \mid \int_X fg = 0\}$ con $g \in L^{p'}(\mu)$.

(Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema de Hahn-Banach).

b) Si $\mathfrak{F} = \mathcal{A}$, el operador esperanza condicional es el operador identidad y se obtiene

COROLARIO 2. Un subespacio propio S de $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$ es cerrado y H-invariante con $\sigma(H) = \mathcal{A}$ si y sólo si existe un subconjunto medible E de X, único salvo conjuntos μ-nulos tal que $S = S_E = \chi_E L^p(\mu)$.

(Para este resultado puede verse [2]).

Demostración.- Sea S un subespacio cerrado y H-invariante. Existen $g_i \in L^{p'}(\mu)$, $i \in I$ tales que

$$S = \bigcap_{i \in I} Sg_i = \{f \in L^p(\mu) \mid fg_i = 0 \text{ a.e. } \forall i \in I\} .$$

Por argumentos de teoría de la medida que pueden verse en [4] pág. 481, existe un conjunto E maximal (salvo conjuntos μ-nulos), tal que $g_i\chi_E = 0$ a.e. $\forall i \in I$. En consecuencia $\chi_A \in S$ para todo subconjunto medible A de E, tal que $\mu(A) < +\infty$, luego $S_E \subseteq S$. Además por su E maximal, si $f \in S$, $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subset E$ a.e., luego $S \subseteq S_E$. El recíproco es inmediato.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA.

Es claro que cada subespacio Sg con $g \in L^{p'}(\mu)$ es cerrado y H-invariante, luego S es un subespacio cerrado y H-invariante.

El paso fundamental para probar la otra implicación está basado en el siguiente lema, que puede verse en [2] (aunque no aparezca explícitamente enunciado).

LEMA. Si S es un subespacio no nulo de $L^p(\mu)$, $(0 < p < +\infty)$, H-invariante, entonces $\overline{S}$ es $L^\infty(\mathfrak{F})$-invariante.

Dada $f \in S$ se tiene que $\int_X fg d\mu = 0$ para toda $g \in S^\perp$, siendo $S^\perp$ el anulador de S en $L^{p'}(\mu)$. Ahora, si S es un subespacio H-invariante también lo es $S^\perp$ y por el lema, será $L^\infty(\mathfrak{F})$-invariante, luego si

$$\int_X fg d\mu = 0 \quad \forall g \in S^\perp \quad \text{tenemos que} \quad \int_F fg d\mu = 0 \quad \forall F \in \mathfrak{F}$$

de lo que se deduce que $S \subseteq S_g$ para toda $g \in S^{\perp}$.

Ahora bien, si $f \in \bigcap_{g \in S^{\perp}} S_g$, como $X \in \mathcal{F}$ se tiene que $\int_X fg\,d\mu = 0$ para toda $g \in S^{\perp}$, y como S es cerrado por hipótesis, entonces $f \in S$.

NOTAS:

1°) El enunciado del teorema puede ampliarse al caso $p = +\infty$ sin más que substituir subespacio cerrado por subespacio $*$-débilmente cerrado.

2°) En general no hace falta tomar todas las funciones g pertenecientes a $S^{\perp}$. Por ejemplo si $H = \{e^{in\theta}, e^{-in\theta}\}$ y $(X,\mathcal{B},\mu) = (T,\mathcal{B}(T),m)$, basta tomar n funciones. En este caso se obtiene una descripción distinta, pero equivalente, a la dada en [1] de los subespacios doblemente invariantes por el operador desplazamiento ("shift") de multiplicidad n.

Un caso importante que no queda recogido en el teorema es, por ejemplo, aquél en el que la σ-álgebra $\tilde{\mathcal{F}}$ sea la de los borelianos periódicos en R. Damos a continuación un resultado relativo a este caso, en el que se utiliza como buen sustituto de la esperanza condicional la periodizada de una función. Recordemos que por la fórmula de Poisson, para toda función $h \in L^1(R)$, la expresión $\tilde{h}(x) = \sum_{n \in Z} h(x+n)$ define una función 1-periódica en R que pertenece a $L^1(T)$ y cuya serie de Fourier es $\sum_{n \in Z} \hat{h}(n) e^{2\pi i x.n}$, ver [3].

TEOREMA 2. Sea $\tilde{\mathcal{F}}$ la σ-álgebra de los borelianos 1-periódicos en R. Un subespacio propio S de $L^p(R)$ $(1 \leq p < +\infty)$ es cerrado y H-invariante con $\sigma(H) = \tilde{\mathcal{F}}$ (por ejemplo, $H = \{e^{2\pi i x}, e^{-2\pi i x}\}$) si y sólo si S es intersección de subespacios $\tilde{S}_g$, con $g \in L^{p'}(\mu)$, siendo

$$\tilde{S}_g = \{f \in L^p(\mu) \mid (fg)^{\sim} = 0 \quad \text{a.e.}\}$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Veamos que para cada $f \in S$ y $g \in S^{\perp}$, $(fg)^{\sim} = 0$ a.e. Para ello, sea A un boreliano de R contenido en $[0,1)$

$$\int_A (fg)^{\sim}(x)dx = \sum_{n \in Z} \int_A f(x+n)g(x+n)dx =$$

$$= \sum_{n \in Z} \int_{A+n} f(x)g(x)dx = \int_R f(x)g(x)\chi_{\bigcup_{n \in Z}(A+n)}(x)dx.$$

Ahora, dado que S es $L^{\infty}(\tilde{\mathcal{F}})$-invariante, según el lema, y $\bigcup_{n \in Z}(A+n) \in \tilde{\mathcal{F}}$ se tiene que $\int_A (fg)^{\sim}(x)dx = 0 \quad \forall A \in [0,1) \cap \mathcal{B}(R)$, luego $S \subseteq \tilde{S}_g$ para toda $g \in S^{\perp}$.

Veamos el contenido contrario, con lo que quedará concluida esta parte.

Sea $f \in \bigcap_{g \in S^{\perp}} \tilde{S_g}$ entonces $(fg)^{\sim} = 0$ a.e. para toda $g \in S^{\perp}$ y

$$\int_R f(x)g(x)dx = \int_0^1 (fg)^{\sim}(x)dx \qquad \text{por lo que}$$

$\int_R f(x)g(x)dx = 0 \quad \forall g \in S^{\perp}$ y como S es un subespacio cerrado, $f \in S$.

$\Leftarrow$) Es claro que $\tilde{S_g}$ con $g \in L^{p'}(\mu)$ es un subespacio cerrado y H-invariante. En consecuencia el subespacio S será cerrado y H-invariante.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] H. RADJAVI, P. ROSHENTAL: Invariant subspaces. Springer Verlag, Berlín, (1973).

[2] M.L. REZOLA: Un teorema de Aproximación en Espacios L^p. Rev. Mat. Hispano-Americana XL (5-6), (1980) 206-215.

[3] E.M. STEIN, G. WEISS: As introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1971).

[4] A.C. ZAANEN: Integration. North Holland, Amsterdam (1967).

M. LUISA REZOLA
Departamento Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Zaragoza
ESPAÑA