UN TEOREMA DE APROXIMACION EN ESPACIOS L^p

por

M. L. REZOLA

(Publicado en la «Revista Matemática Hispano - Americana»,
4.ª Serie - Tomo XL - Núms. 5-6)

MADRID
Talleres Gráficos Vda. de C Bermejo
Santa Engracia, 122.-Tel. 441 06 19
1 9 8 0

UN TEOREMA DE APROXIMACION EN ESPACIOS L^p

por

M. L. REZOLA

1. INTRODUCCIÓN

El objeto de este trabajo es obtener un resultado de aproximación en L^p-norma del tipo del teorema de Stone-Weierstrass para funciones continuas. Nos fijaremos para ello en la siguiente versión del teorema de Stone-Weierstrass que se ve en [3], pág. 53:

TEOREMA 0.—*Sea X un espacio completamente regular, H una subálgebra de $C(X)$, que separa puntos (autoconjugada en el caso complejo) y S un subespacio de $C(X)$, H-invariante ($H\,S \subseteq S$); entonces* $f \in \bar{S}$ *si y sólo si* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in F$, *siendo*

$$F = \bigcap_{g \in S} g^{-1}(0)$$

Denotemos por (i) la condición: «$f(x) = 0$ para todo $x \in F$», y por (ii): «H separa puntos».

Queremos un resultado análogo en $L^p(X, \mathcal{H}, \mu)$ (brevemente $L^p(\mu)$), con X espacio de medida y μ medida positiva. Sea S un subespacio de $L^p(\mu)$ y H un subconjunto de $L^\infty(\mu)$ (para que tenga sentido $H\,S \subseteq S$) no necesariamente subálgebra; para caracterizar las funciones $f \in S$, la condición (i) se traduce por: «f se anula en los puntos en los que se anulan todas las funciones de S», y la condición (ii) podría traducirse (teniendo en cuenta que estamos considerando clases de equivalencia a. e.) por:

(*) No existe ningún E de medida positiva (no átomo) tal que cada $\varphi \in H$, sea constante a. e. sobre E.

Sin embargo esto no es satisfactorio, pues basta tomar H = {funciones pares acotadas medibles en $\mathbb{R}$} que cumple (*) pero S = {funciones pares medibles} $\subseteq L^p(\mu)$ no es denso.

Obsérvese que el conjunto de las funciones pares continuas reales no cumple (ii), pues es constante en cada conjunto $\{-a, a\}$ con $a \in \mathbb{R}$. La cuestión está en que estos conjuntos son de medida nula.

Una traducción más satisfactoria de (ii) es:

(**) No existe ninguna σ-álgebra $\mathcal{F}$, contenida estrictamente en $\mathcal{A}$, tal que toda $\varphi \in H$ sea $\mathcal{F}$-medible.

Nótese que la condición (**) es más fina que (*) (basta tomar $\mathcal{F}_E = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap E = \phi$ ó $E \subset A\}$). El subespacio de las funciones pares acotadas, verifica (*) pero no (**).

Los resultados fundamentales que probaremos (teorema 1 para el caso real, teorema 2 para el caso complejo) establecen que el análogo del teorema 0 para $L^p(\mu)$, con $0 < p < \infty$, es cierto si en la condición (i) se sustituye F por el soporte del subespacio y (ii) se sustituye por (**).

2. El teorema fundamental

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito, y $0 < p < \infty$. Denotaremos por $L^p_{\mathbb{C}}$ el espacio de las clases de equivalencia a. e. de funciones medibles complejas p-integrables y L^p cuando nos referimos a funciones reales. Si A es un subconjunto medible de X, $L^p_{\mathbb{C}}(A)$ y $L^p(A)$ serán los correspondientes subespacios de los anteriores, de las funciones que se anulan fuera de A.

$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}$ ó $\mathcal{L}^\infty$ serán los espacios de las funciones medibles complejas o reales, esencialmente acotadas.

Si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ y $E \subseteq X$ es medible, f_E es la función, $f_E(x) = 0$ si $x \notin E$, $f_E(x) = f(x)$ si $x \in E$, es decir la función $f\chi_E$.

Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$, la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{D}$ se denota $\sigma(\mathcal{D})$.

Si $\mathcal{B}$ es la familia de los borelianos de $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$,

$$\sigma(H) = \bigvee_{\varphi \in H} \varphi^{-1}(\mathcal{B})$$

es la mínima σ-álgebra contenida en $\mathcal{A}$, respecto de la cual todas las $\varphi \in H$ son medibles, o, equivalentemente la σ-álgebra engendrada por

$$\{\varphi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B},\ \ \varphi \in H\}.$$

DEFINICIONES:

1) Dada cualquier función medible f: $X \longrightarrow \mathbb{C}$, llamamos *soporte de f* al conjunto medible:

$$\operatorname{sop} f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

2) Sea S una familia de funciones medibles (o de clases de equivalencia a. e. de funciones medibles). Dado un conjunto medible E, diremos que *S se anula sobre E* cuando: $\mu(E) > 0$ y $f_E = 0$ a. e. para toda $f \in S$.

3) Sea H una familia de funciones medibles acotadas (o esencialmente acotadas). Una familia S de funciones medibles (o clases de equivalencia a. e.) se dice *H-invariante* si $f\varphi \in S$ y $\varphi \in H$.

4) Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ σ-álgebras. Diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes si sus complecciones (respecto de μ) coinciden.

5) Sea S un subespacio de L^p con $0 < p < \infty$: sabemos que X puede descomponerse en dos conjuntos medibles disjuntos, tales que S se anula en uno de ellos y no se anula en ningún subconjunto del otro, es decir, $X = A \cup B$ con $A \cap B = \phi$, S nulo en B y no nulo en los subconjuntos de A (véase [6], pág. 481).

Tales conjuntos A, B quedan unívocamente determinados (módulo conjuntos de medida nula) y designaremos $\operatorname{sop} S = A$.

TEOREMA 1.—*Sea H un subconjunto de $\mathcal{L}^\infty$ y S un subespacio H-invariante de L^p, con $0 < p < \infty$. Si $\operatorname{sop} S = A$ y $\sigma(H)$ es equivalente a $\mathcal{A}$ entonces la clausura de S en L^p es $L^p(A)$.*

3. LEMAS PREVIOS

Veamos unos lemas previos a la demostración del teorema; el primero es un caso particular del teorema a probar.

LEMA 1.—*Sea S un subespacio vectorial de L^p $(0 < p < \infty)$ $\mathcal{L}^\infty$-invariante y $A \subseteq X$ su soporte; entonces S es denso en $L^p(A)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Consideremos en primer lugar el caso $1 \leq p < \infty$. Si $g \in L^p(A)$, bastará ver que todo funcional lineal acotado que se anula en S, se anula en g.

Sea $h \in L^{p'}(A) = (L^p(A))'$ tal que $\int_A h\, f\, d\mu = 0$ para toda $f \in S$.

Dada $f \in S$, por ser S $\mathcal{L}^\infty$-invariante, tenemos que $f \varphi \in S$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$, luego $\int_A h f \varphi \, d\mu = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$, por lo que $h f = 0$ a. e., para toda $f \in S$. Entonces, S se anula en sop h, de lo que se deduce que S se anula en sop $h \cap$ sop g y, como por hipótesis, S no se anula en subconjuntos de A, se tendrá que

$$\mu(\text{sop}\, h \cap \text{sop}\, g) = 0,$$

por lo que $\int_A h g = 0$.

Sea ahora $0 < p < 1$. Es claro que $S \cap L^1$ es $\mathcal{L}^\infty$-invariante. Veamos que sop $(S \cap L^1) = A$. Si sop $(S \cap L^1)$ no fuese A, tendríamos que $S \cap L^1$ se anularía en algún C, subconjunto medible de A, con $\mu(C) > 0$; ahora bien, como sop $S = A$, existe $f \in S$ tal que

$$\mu\{x \in C : f(x) \neq 0\} > 0,$$

y se puede encontrar un $E \subseteq C$ con $\mu(E) > 0$ tal que $\int_E |f| < \infty$. Tenemos pues que $f \chi_E \in L^1(A)$ y, por ser S $\mathcal{L}^\infty$-invariante, $f \chi_E \in S$, con lo que $f \chi_E \in S \cap L^1$ y esto contradice la hipótesis de que $S \cap L^1$ se anula en C.

Como $S \cap L^1$ es un subespacio de L^1 $\mathcal{L}^\infty$-invariante y con soporte A, por la parte anterior, sabemos que $S \cap L^1$ es denso en L^1.

En el caso de ser $\mu(X) < \infty$, como $L^1(A)$ es un subespacio denso de $L^p(A)$ cumpliéndose,

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_1 \, |\mu(x)|^{1/p-1}$$

con $0 < p < 1$, es claro que $S \cap L^1$ es denso en $L^p(A)$ y por tanto S es denso en $L^p(A)$.

Veamos qué ocurre si $\mu(A) = \infty$. Por ser μ σ-finita, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con los A_n crecientes y de medida finita. Como $S \subset L^p$, es claro que

$$S \chi_{A_n} \subset L^p(A_n)$$

es $\mathcal{L}^\infty(A_n)$-invariante y no se anula en ningún subconjunto de A_n, lo que implica que

$$\overline{S\chi_{A_n}} = L^p(A_n)$$

para cada $n \in N$.

Probemos que S es denso en $L^p(A)$. Dada $h \in L^p(A)$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\int_A |h|^p = \lim_n \int_{A_n} |h|^p < \infty,$$

de donde existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si

$$n \geq n_0, \int_{A-A_n} |h|^p < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, por ser $S\chi_{A_n}$ denso en $L^p(A_n)$, existe $f_n \in S$ tal que

$$\| f_n \chi_{A_n} - h\chi_{A_n} \|_p^p \leq \varepsilon/2$$

luego

$$\| f_n \chi_{A_n} - h \|_p^p = \int_A | f_n \chi_{A_n} - h |^p \, d\mu =$$

$$= \int_{A\setminus A_n} | f_n \chi_{A_n} - h |^p \, d\mu + \int_{A_n} | f_n \chi_{A_n} - h |^p \, d\mu =$$

$$= \int_{A\setminus A_n} | h |^p \, d\mu + \int_A | f_n \chi_{A_n} - h\chi_{A_n} |^p \, d\mu \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Además $f_n \chi_{A_n} \in S$, pues $f_n \in S$ que es $\mathcal{L}^\infty$-invariante y subespacio vectorial; por lo tanto S es denso en $L^p(A)$. Nótese que si sop S = A, entonces sop $\overline{S}$ = A por lo que $\overline{S} = L^p(A)$.

El segundo lema es un resultado conocido (véase [1], pág. 53).

Lema 2.—*Sea $\mathfrak{D}$ una familia de partes de X, cerrada para la formación de intersecciones finitas, y sea $\mathcal{A}$ otra familia de parte de X, que verifica:*

a) $X \in \mathcal{H}$.
b) $A, B \in \mathcal{H}$ y $B \subseteq A \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{H}$.
c) $A_n \in \mathcal{H}$, $A_n \downarrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{H}$.
Entonces si $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ *se tiene* $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}$.

4. Demostración del teorema

La realizaremos en tres etapas.

1.°) Sea

$$\mathcal{D}_0 = \bigcup_{\varphi \in H} \varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \{\varphi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}, \varphi \in H\}.$$

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{D}_0$ y $f \in S$, veamos que

$$f \chi_{E_1 E_2 \ldots E_n} \in S.$$

Por simplificar, lo demostraremos para dos conjuntos.

Como $H \subset \mathcal{L}^\infty$, puede suponerse que el rango esencial de cada uno de sus elementos está contenido en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Así, consideremos

$$E = \varphi^{-1}(B) \quad \text{y} \quad F = \Psi^{-1}(C)$$

donde

$$(\varphi, \Psi \in H, \varphi : X \to [a, b] \quad \text{y} \quad \Psi : X \to [c, d]$$

con B boreliano contenido en $[a, b]$, C boreliano contenido en $[c, d]$. Llamemos

$$(\varphi, \Psi) = \xi : X \to [a, b] \times [c, d]$$

Tenemos

$$\xi^{-1}(B \times C) = \varphi^{-1}(B) \cap \Psi^{-1}(C),$$

luego $E \cap F = \xi^{-1}(B \times C)$, por lo que $\chi_{E \cap F} = \chi_{B \times C} \circ \xi$.

Sea α la medida imagen por ξ de la medida de densidad ν, dada por $d\nu = |f|^p$, es decir,

$$\alpha\ .) = \int_{\xi^{-1}(.)} |f|^p \, d\mu.$$

Como $|f|^p \, d\mu$ es una medida positiva finita, la medida imagen α será una medida de Borel finita y positiva sobre $[a, b] \times [c \cdot d]$.

Dada $\chi_{B \times C} \in L^p([a, b] \times [c, d], \alpha)$, como consecuencia del teorema de Lusin y del teorema de Stone-Weierstrass, es sencillo ver que existe una sucesión de polinomios reales en dos variables, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, uniformemente acotados en $[a, b] \times [c, d]$ y tal que $P_n \longrightarrow \chi_{B \times C}$ $(\alpha$ — a. e.). En consecuencia

$$P_n \circ \xi \rightarrow \chi_{B \times C} \circ \xi \; (\nu - a. e.) \qquad \text{y} \qquad |P_n \circ \xi - \chi_{B \times C} \circ \xi|^p \rightarrow 0 \; (\nu - a. e.)$$

Como, por otra parte,

$$|P_n \circ \xi - \chi_{B \times C} \circ \xi|^p \leq (k + 1)^p$$

(donde k es la constante que acota uniformemente a los polinomios), por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que $P_n \circ \xi \longrightarrow \chi_{B \times C} \circ \xi$ en $L^p(\nu)$ y, teniendo en cuenta la definición de ν, $(P_n \circ \xi) f \longrightarrow (\chi_{B \times C} \circ \xi) f$ en $L^p(\mu)$.

Ahora si

$$P_n(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x^i y^j, \qquad P_n \circ \xi = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \varphi^i \Psi^j$$

y por ser S subespacio H-invariante tenemos que $(P_n \circ \xi) f \in S$, luego $(\chi_{B \times C} \circ \xi) f \in \bar{S}$, es decir $f \chi_{E \cap F} \in \bar{S}$.

2.°) Fijada $f \in S$, sean $\mathcal{D}$ la familia de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{D}_0$ y

$$\mathcal{G} = \{E \in \mathcal{A} \mid f \chi_E \in \bar{S}\}.$$

Como la familia $\mathcal{G}$ verifica los apartados a), b) y c) del lema 2 (simple comprobación), por 1.°), $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$, luego aplicando el lema 2, $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{G}$. Ahora bien, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, luego $\sigma(H) \subset \mathcal{G}$, por lo que $f \chi_A \in \bar{S}$ para todo $A \in \sigma(H)$.

3.°) Por último, veremos que $\bar{S}$ es $\mathcal{L}^\infty$-invariante, con lo que aplicando el lema 1, habremos concluido el teorema.

Dadas $f \in S$ y $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$, existe una sucesión de funciones simples $\sigma(H)$-medibles, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $s_n \longrightarrow \varphi$ [unif.] a. e., por lo que $s_n \longrightarrow \varphi$ en $L^p(\nu)$ y $s_n f \longrightarrow \varphi f$ en $L^p(\mu)$. Como $\bar{S}$ es subespacio vectorial se tiene por 2.°) $s_n f \in \bar{S}$, luego $\varphi f \in \bar{S}$. Por continuidad, lo anterior se extiende a todo $f \in \bar{S}$.

5. ALGUNAS VARIANTES Y EJEMPLOS

OBSERVACIÓN 1.—La hipótesis «$\sigma(H)$ equivalente a $\mathcal{A}$» del teorema no es superflua. En efecto, si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, σ-finita (respecto μ), no equivalente a $\mathcal{A}$, llamando $S = L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, es fácil ver que S es H-invariante, con $H = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, sop $S = X$ y sin embargo $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ está contenido estrictamente en $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

OBSERVACIÓN 2.—Si en el teorema 1 consideramos el espacio $L^p_{\mathbb{C}}$, sin añadir más hipótesis, no es cierto, pues basta tomar el espacio $L^p(T)$, siendo T el toro unidimensional, y $S = \{$polinomios analíticos en $T\}$; es evidente que S es subespacio de $L^p(T)$, H-invariante para $H = S$ que a su vez cumple $\sigma(H) = \{$borelianos de $T\}$ y sop $S = T$. Sin embargo $S = H^p$ está estrictamente contenido en $L^p_{\mathbb{C}}$.

TEOREMA 2.—*Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito, H un subconjunto de $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}$ y S un subespacio H-invariante de $L^p_{\mathbb{C}}$, con $0 < p < \infty$. Si sop $S = A$, $\sigma(H)$ es equivalente a $\mathcal{A}$ y H es autoconjugado, entonces $\bar{S} = L^p_{\mathbb{C}}(A)$.*

DEMOSTRACIÓN.—La única diferencia, de la demostración del teorema 1 (caso real), aparece en la primera etapa. Al aplicar el teorema de Stone-Weierstrass y el teorema de Lusin, utilizando la misma notación y teniendo en cuenta que ahora el rango esencial de las funciones de H son bolas cerradas en $\mathbb{C}$, tendremos que dada $\chi_{B \times C}$, existe una sucesión de polinomios

$$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \left(P_n(z, \bar{z}\, w, \bar{w}) = \sum_{1 \leq j,k,h,l \leq n}' c_{jkhl}\, z^j \bar{z}^k w^h \bar{w}^l\right)$$

tal que $P_n \longrightarrow \chi_{B \times C}$ a. e.

Ahora,

$$P_n \circ \xi = \sum c_{jkhl}\, \varphi^j \bar{\varphi}^k \Psi^h \bar{\Psi}^l \quad \text{y} \quad (P_n \circ \xi) f \in S$$

por ser S H-invariante con H autoconjugada. De forma análoga al teorema 1 se acaba la demostración.

OBSERVACIÓN 3.—La condición $\sigma(H)$ equivalente a $\mathcal{A}$ $(\sigma(H) \sim \mathcal{A})$

puede ser a veces difícil de comprobar. A continuación damos una condición que es suficiente para que se cumpla la anterior.

«Se dice que $H \subset \mathcal{L}_C^\infty$ es una *familia total* si separa puntos de L_C^1 (i. e., si H engendra un subespacio $*$-débilmente denso en $\mathcal{L}_C^\infty$)».

Veamos que si $H \subset \mathcal{L}_C^\infty$ es total y la σ-álgebra $\sigma(H)$ es σ-finita (respecto μ), entonces $\sigma(H) \sim \mathcal{H}$. En efecto, si $\sigma(H)$ no fuera equivalente a $\mathcal{H}$, estaría contenida estrictamente en $\mathcal{H}$; considerando el subespacio $S = L^2(X, \sigma(H), \mu)$, que también estaría estrictamente contenido en $L^2(X, \mathcal{H}, \mu)$, tendríamos que, dada una función g no nula, ortogonal a S, como el sop S = X, existiría alguna función f de S tal que $f\,g = 0$. Además $\int_X f\,\varphi\,\bar{g}\,d\mu = 0$ para toda $\varphi \in H$, pues el subespacio S es H-invariante, y, como $f\,\bar{g} \in L_C^1$, entonces H no sería total.

Ejemplos.—Para los ejemplos siguientes entendemos que un conjunto medible $M \subseteq X$ es *localmente nulo* cuando no posee ningún subconjunto de medida finita, es decir $\mu(M \cap E) = 0$, para todo E tal que $0 < \mu(E) < \infty$.

1) Sean X y μ cualesquiera. Si $f \in L_C^p$ y $f^{-1}(0)$ es localmente nulo, toda función de L_C^p puede aproximarse en L^p-norma por combinaciones lineales de la forma $\sum_{k=1}^{n} c_k f_{E_k}$ con $c_k \in \mathbb{C}$ y $0 < \mu(E_k) < \infty$.

2) Sea X un espacio localmente compacto (Hausdorff) y μ una medida regular. Si $f \in L_C^r$ con $p \leqslant r < \infty$ y $f^{-1}(0)$ es localmente nulo, el subespacio $\{f\varphi \mid \varphi$ es continua de soporte compacto$\}$ es denso en L_C^p.

3) Sea $(X, \mathcal{H}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera. Si $f \in L^p$, φ es continua, estrictamente monótona de $\mathcal{L}^\infty$, $f^{-1}(0)$ y $\varphi^{-1}(0)$ son localmente nulos, y φ engendra una σ-álgebra equivalente a $\mathcal{H}$, entonces el subespacio

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k f \varphi^k \mid a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en L^p.

4) Sea G un grupo abeliano, localmente compacto y σ-compacto y μ su medida de Haar. Todo subespacio lineal no nulo $S \subset L_C^p$ invariante por traslaciones e invariante por: a) restricción a conjuntos compactos, o, b) multiplicación por funciones continuas de soporte com-

pacto, o, c) multiplicación por caracteres continuos, es denso en L^p. Este ejemplo, con la condición c), generaliza el teorema de aproximación obtenido en [5] únicamente para L^1_c.

5) Todo subespacio lineal no nulo de $L^2(\mathbb{R}^n)$, invariante por traslaciones y tal que el soporte de sus transformadas de Fourier sea $\mathbb{R}^n$, es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Esto es una variante para $L^2(\mathbb{R}^n)$ del teorema tauberiano de Wiener (véase [4]).

6) Todo subespacio lineal no nulo en $L^2(\mathbb{R}^n)$, invariante por convolución respecto una familia de medidas, cuyas transformadas de Fourier engendran los borelianos de $\mathbb{R}^n$, es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$. El ejemplo anterior es un caso particular de éste cuando se toma la familia de las δ de Dirac en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$.

Observación 4.—Los teoremas 1 y 2, en el caso de ser μ finita son válidos para espacios de Orlicz, $\Phi(L)$, siendo Φ una función no negativa definida en $[0, \infty]$, creciente, continua, convexa y que satisface la condición Δ_2 (véase [2]).

Referencias bibliográficas

[1] Hunt, G. A.: *Martingales et processus de Markov.* Dunod (1966).

[2] Kufner, A. et al.: *Function Spaces.* Noordhoff Int. Publ. (1977).

[3] Nachbin, L.: *Elements of aproximation theory.* Van Nostrand (1967).

[4] Reiter, H.: *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups.* Oxford Math. Monographs. (1968).

[5] Rubio, J. L.: *Un criterio de aproximación en $L^1(R)$.* «Actas 1.as Jornadas Mat. Luso-Españolas» (1973). 197-202.

[6] Zaanen, A.: *Integration.* North-Holland Pu. Co. (1967).

Departamento de Teoria de Funciones
Facultad de Ciencias
Zaragoza