VALORES FRONTERA DE H^p EN DOMINIOS PLANOS CON PESOS

J.J. Guadalupe y M.L. Rezola

Sea μ una medida finita no negativa sobre la circunferencia unidad T, absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue $d\theta$, i.e., $d\mu = w d\theta$. Denotamos por $H^p(D,\mu)$ el espacio de las funciones holomorfas en el disco unidad D., tales que $\sup_{0\leq r<1} \int |f(re^{i\theta})|^p w(\theta)d\theta < \infty$ y por $H^p(T,\mu)$ la clausura de los polinomios analíticos en $L^p(T,\mu)$. Si $1<p<\infty$ y $\log w \in L^1$ se obtiene: a) $H^p(D,\mu)$ es un espacio de Banach, b) toda función de $H^p(D,\mu)$ converge no tangencialmente en la frontera a una función de $H^p(T,\mu)$, c) existe una inclusión continua $H^p(D,\mu) \hookrightarrow K_p.H^p(D)$ donde $H^p(D)$ es el espacio de Hardy clásico y $1/K_p$ es la única función externa tal que $|K_p|^p w = 1$ a.e.

Se obtienen resultados similares a los anteriores si, en lugar del disco unidad, se consideran ciertos dominios de Jordan.

Clasificación A.M.S.(1980) 30D55, 42A50.

Introducción

Sea μ una medida finita no negativa sobre la circunferencia unidad T, absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue normalizada $d\theta$, i.e., $d\mu = w d\theta$ y $L^p(T,\mu)$, $0 < p < \infty$, el conjunto de las funciones complejas μ-medibles sobre T tales que $\int_T |f|^p d\mu < \infty$. Denotamos por $H^p(D,\mu)$ el espacio de las funciones holomorfas en el disco unidad D, tales que $\sup_{0\leq r<1} \int_T |f(re^{i\theta})|^p d\mu < \infty$ y por $H^p(T,\mu)$, la clausura en $L^p(T,\mu)$ de los polinomios analíticos $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Si μ es la medida de Lebesgue, se tienen los espacios de Hardy clásicos $H^p(D)$ y $H^p(T)$.

En [3] se prueba que si $\log w \in L^1(T)$ y $0 < p < \infty$, entonces $H^p(T,\mu) = K_p.H^p(T)$ donde $1/K_p$ es la única función externa (salvo constantes de módulo uno) tal que $|K_p|^p w = 1$ a.e. Cuestión 1: ¿Existe un análogo del resultado anterior para $H^p(D,\mu)$, ó sea, $H^p(D,\mu) = K_p.H^p(D)$?

Por otra parte, un conocido resultado en la teoría clásica de espacios de Hardy [2], establece un isomorfismo isométrico entre las funciones de $H^p(D)$ y sus valores frontera $H^p(T)$. Cuestión 2: ¿Existe isomorfismo cuando hay un peso sobre T, o sea, entre $H^p(D,\mu)$ y $H^p(T,\mu)$.

Ambas cuestiones son abordadas en el §1. En el §2 se estudian en un contexto más general, cuando D es sustituido por un dominio de Jordan Ω.

1. El caso del disco unidad

No es difícil comprobar que la condición ($\log w \in L^1(T)$), que "funcio na bien" en el caso del toro T, proporciona la equivalencia entre ambas cuestiones, es decir, si $\log w \in L^1(T)$, son equivalentes: a) $H^p(D,\mu) = K_p H^p(D)$ y b) $H^p(D,\mu)$ es isomorfo a $H^p(T,\mu)$. Sin embargo esta condición sólo resuelve parcialmente las cuestiones planteadas, en el siguiente sentido.

<u>Teorema 1</u>. Si $\log w \in L^1(T)$ y $1<p<\infty$, entonces:

i) $H^p(D,\mu) \subset K_p . H^p(D)$, donde K_p^{-1} es la única función externa tal que $|K_p(e^{i\theta})|^p\, w = 1$ a.e.

ii) Si $f \in H^p(D,\mu)$, existe convergencia no tangencial a una función $f^* \in H^p(T,\mu)$.

El espacio $H^p(D,\mu)$ es Banach.

<u>Demostración</u>. Sea $f \in H^p(D,\mu)$ $(1<p<\infty)$ y denotamos $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, $0\le r<1$. Por hipótesis $\{f_r\}$ es uniformemente acotada en $L^p(T,\mu)$, luego existe una sucesión $\{f_{r_n}\}$ que converge en la topología débil a una función $f^* \in L^p(T,\mu)$. Ahora bien, $f^* \in H^p(T,\mu)$ si y sólo si $\int_T f^*(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \overline{K}_{p'}(e^{i\theta})\alpha_p(\theta) w(\theta)\, d\theta = 0$ para todo $n<0$, donde $\alpha_p(\theta) = \exp\left[(1/p-1/p')i\, (\log w(\theta))^{\sim}\right]$, $\sim$ denota la función conjugada y $1/p + 1/p' = 1$, [3], Entonces, $\int_T f^* \overline{K}_{p'} e^{-in\theta}\alpha_p . w d\theta = \lim_n \int_T f_{r_n} . \overline{K}_{p'}\, e^{-in\theta}\alpha_p . w d\theta = 0$ para todo $n<0$, ya que $f_{r_n} \in H^p(T,\mu)$ y $g = \overline{K}_{p'} e^{-in\theta}\alpha_p \in L^{p'}(T,\mu)$.

Tenemos ahora un funcional $\Phi : L^{p'}(T,\mu) \longrightarrow C$, definido por

$$\Phi(g) = \int_T f^* . g . w d\theta = \lim_n \int_T f_{r_n} . g . w d\theta$$

Tomando $g = \overline{K}_p |K_p|^{p-2} P_z$, donde P_z representa el núcleo de Poisson en z , resulta $\int_T f^*/K_p . P_z d\theta = \int_T f^* \overline{K}_p |K_p|^{p-2} P_z\, w d\theta = \lim_n \int_T f_{r_n}/K_p . P_z d\theta = f(z)/K_p(z)$.

Entonces f se recupera a partir de sus valores frontera mediante $f(z) = K_p(z) . \int_T f^*/K_p . P_z d\theta = K_p(z) . P_z * (f^*/K_p)$, que prueba i) y ii) . Veamos que $H^p(D,\mu)$ es Banach. Sea $\{f_n\}$ sucesión de Cauchy en $H^p(D,\mu)$ y $\{f_n^*\}$ la sucesión de sus valores frontera. Aplicando el lema de Fatou se tiene que $\{f_n^*\}$ es de Cauchy en $H^p(T,\mu)$. Por otra parte, $f_n^* = K_p . g_n^*$ y $g_n^* \in H^p(T)$, por lo que $\{g_n^*\}$ converge en $H^p(T)$ y por tanto $||g_n^*||<M$ uniformemente en n. Teniendo en cuenta que $f_n(re^{i\theta}) = K_p(re^{i\theta})\, P_{re^{i\theta}} * (f_n^*/K_p)$ y el lema pg 36 [1] , se tiene que $|f_n(re^{i\theta})| \le C_r$, con constante independiente de n.

Entonces $\{f_n\}$ es una familia normal y existe $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente sobre compactos a una función analítica f. Fijado r, resulta $\int |f(re^{i\theta})-f_m(re^{i\theta})|^p w d\theta = \lim_k \int |f_{n_k}(re^{i\theta})-f_m(re^{i\theta})|^p w d\theta$ y aplicando la hipótesis se sigue que $f \in H^p(D,\mu)$ y por tanto es Banach. #

Nota. Si log w e BMO (BMO son las funciones de oscilación media acotada [2]), los resultados del teorema son válidos para $0<p<\infty$. En efecto: como log w e BMO , existe q>0 tal que $w^{-q} \in L^1(T)$. Dado que $\int_T |f(re^{i\theta})|^s \leq$
$\leq \left(\int_T |f(re^{i\theta})|^p w\right)^{1/\alpha} \left(\int_T w^{-\alpha'/\alpha}\right)^{1/\alpha'}$ con $s.\alpha = p$, tomando $\alpha'/\alpha = q$ se sigue que si $f \in H^p(D,\mu)$ entonces $f \in H^s(D)$ y en particular existe su límite no tangencial que pertenece a $L^p(T,\mu)$ sin más que aplicar el lema de Fatou; como $1/K_p \in H^p(D)$ y los valores frontera de $f/K_p \in L^p(T)$ se sigue i) y ii) del teorema. La completitud $(0<p<\infty)$ se obtiene con los mismos argumentos empleados en el teorema.

Según esto , puede decirse que los resultados son ciertos con condiciones más débiles sobre el peso como son: $\log w \in L^1$ y $w^{-q} \in L^1(T)$ con $q > 0$.

Obsérvese, que aún en el caso de que log w e BMO, no conseguimos el isomorfismo buscado y solamente podemos obtener que $K_p \in H^{p-\varepsilon}(D,\mu)$ $(\varepsilon>0)$. Una condición más fuerte que garantiza que log w e BMO es que $w \in A_\infty$, donde A_∞ es la unión de las clases A_p de Muckenhoupt [2] . La condición A_∞ es una condición suficiente que responde afirmativamente a las cuestiones 1 y 2, [4] y [5] . En este caso se obtienen, entre otras, las siguientes consecuencias:

a) $H^p(D,\mu)^* = H^{p'}(D,\mu)$, $1/p + 1/p' = 1$, $p > 1$

b) $H^p(D,\mu) \cdot H^q(D,\mu) = H^r(D,\mu)$, $1/p+1/q = 1/r$

La proximidad de las condiciones $w \in A_\infty$ y log w e BMO, junto a los comentarios anteriores nos lleva a la siguiente

Conjetura. Las cuestiones 1 y 2 tienen respuesta afirmativa $\Longleftrightarrow$ $w \in A_\infty$.

2. Dominios planos.

Sea Γ una curva de Jordan rectificable y μ una medida finita no negativa que es absolutamente continua respecto a la longitud de arco ds, i.e. $d\mu = w ds$. Denotemos por Ω la región interior de Γ y por ϕ la transformación conforme de $|z|\leq 1$ sobre $\bar{\Omega}$ que, sin pérdida de generalidad, supondremos normalizada por $\phi(0)=0$ y $\phi'(0)>0$. El conjunto Ω queda descrito por $\Omega =$
$=\{(r,u)\,|\,0=r<1,\ u\in\Gamma\}$ donde $u=\phi(e^{i\theta})$ y la curva Γ_r imagen por ϕ de la circunferencia $|z|\leq r$ viene dada por $\Gamma_r=\{(r,u):u\in\Gamma\}$. De manera natural definimos

Entonces $\{f_n\}$ es una familia normal y existe $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente sobre compactos a una función analítica f. Fijado r, resulta $\int |f(re^{i\theta})-f_m(re^{i\theta})|^p w d\theta = \lim_k \int |f_{n_k}(re^{i\theta})-f_m(re^{i\theta})|^p w d\theta$ y aplicando la hipótesis se sigue que $f \in H^p(D,\mu)$ y por tanto es Banach. #

Nota. Si log w ∈ BMO (BMO son las funciones de oscilación media acotada [2]), los resultados del teorema son válidos para $0<p<\infty$. En efecto: como log w ∈ BMO , existe $q>0$ tal que $w^{-q} \in L^1(T)$. Dado que $\int_T |f(re^{i\theta})|^s \leq$ $\leq \left(\int_T |f(re^{i\theta})|^p w\right)^{1/\alpha} \left(\int_T w^{-\alpha'/\alpha}\right)^{1/\alpha'}$ con $s.\alpha = p$, tomando $\alpha'/\alpha = q$ se sigue que si $f \in H^p(D,\mu)$ entonces $f \in H^s(D)$ y en particular existe su límite no tangencial que pertenece a $L^p(T,\mu)$ sin más que aplicar el lema de Fatou; como $1/K_p \in H^p(D)$ y los valores frontera de $f/K_p \in L^p(T)$ se sigue i) y ii) del teorema. La completitud $(0<p<\infty)$ se obtiene con los mismos argumentos empleados en el teorema.

Más en general, puede verse que los resultados son ciertos con condiciones más débiles sobre el peso como son: log w ∈ L^1 y w ∈ $L' \log^+ L$.

Obsérvese, que aún en el caso de que log w ∈ BMO, no conseguimos el isomorfismo buscado y solamente podemos obtener que $K_p \in H^{p-\varepsilon}(D,\mu)$ $(\varepsilon>0)$. Una condición más fuerte que garantiza que log w ∈ BMO es que $w \in A_\infty$, donde A_∞ es la unión de las clases A_p de Muckenhoupt [2] . La condición A_∞ es una condición suficiente que responde afirmativamente a las cuestiones 1 y 2, [4] y [5] . En este caso se obtienen, entre otras, las siguientes consecuencias:

a) $H^p(D,\mu)^* = H^{p'}(D,\mu)$, $1/p + 1/p' = 1$, $p > 1$

b) $H^p(D,\mu) \cdot H^q(D,\mu) = H^r(D,\mu)$, $1/p+1/q = 1/r$

La proximidad de las condiciones $w \in A_\infty$ y log w ∈ BMO, junto a los comentarios anteriores nos lleva a la siguiente

Conjetura. Las cuestiones 1 y 2 tienen respuesta afirmativa $\Longleftrightarrow$ $w \in A_\infty$.

2. Dominios planos.

Sea Γ una curva de Jordan rectificable y μ una medida finita no negativa que es absolutamente continua respecto a la longitud de arco ds, i.e. $d\mu = w ds$. Denotemos por Ω la región interior de Γ y por ϕ la transformación conforme de $|z|\leq 1$ sobre $\bar{\Omega}$ que, sin pérdida de generalidad, supondremos normalizada por $\phi(0)=0$ y $\phi'(0)>0$. El conjunto Ω queda descrito por $\Omega =$ $=\{(r,u) | 0=r<1, u\in\Gamma\}$ donde $u=\phi(e^{i\theta})$ y la curva Γ_r imagen por ϕ de la circunferencia $|z|\leq r$ viene dada por $\Gamma_r=\{(r,u):u\in\Gamma\}$.De manera natural definimos

$H^p(\Omega,\mu)=\{f$ holomorfas en $\Omega: \sup_{o\leq r<1}\int_\Gamma |f(r,u)|^p d\mu(u) < \infty\}$ y $H^p(\Gamma,\mu)$ el subespacio cerrado de $L^p(\Gamma,\mu)$ engendrado por los polinomios analíticos. Cuando $d\mu=ds$ denotamos $H^p(\Omega)$ y $H^p(\Gamma)$ los correspondientes espacios. A μ viene asociada una medida ν sobre T dada por $d\nu = w\circ\phi.|\phi'|d\theta$. Usando el teorema de Mergelyan [6] , se tiene que $f \in H^p(\Omega\mu)$ sii $f\circ\phi \in H^p(D,\nu)$ y $f \in H^p(\Gamma,\mu)$ sii $f\circ\phi \in H^p(T,\nu)$.

Supondremos, a partir de ahora, que Γ es arco cuerda para que se tenga $H^p(\Gamma,\mu) \subsetneq L^p(\Gamma,\mu)$. Estas curvas verifican que $|\phi'| \in A_\infty$, [7] . Denotamos $q_o(\Gamma) = \inf \{q:|\phi'| \in A_q\}$.

<u>Teorema 1'</u>. Sea Γ arco-cuerda, $q > q_o$, $\log^q w \in L^1(\Gamma)$ y $1 < p < \infty$. Entonces:

i) $H^p(\Omega,\mu) \subset q.H^p(\Omega)$, donde $|q^*|^p w = 1$ a.e.

ii) Si $f \in H^p(\Omega,\mu)$ existe convergencia no tangencial a $f^* \in H^p(T,\mu)$

<u>Demostración</u>. Si $f \in H^p(\Omega,\mu)$, se tiene que $f\circ\phi = q_1.h_1$, donde $h_1 \in H^p(D)$ y $|q_1|^p\nu=1$ a.e. Por otra parte $H^p(D,|\phi'|d\theta) = q_2.H^p(D)$ pues $|\phi'|\in A_\infty$; entonces $h_1=h_2/q_2$ con $h_2 \in H^p(D,|\phi'|d\theta)$ y $|q_2|^p|\phi'|=1$, a.e. Por tanto $f\circ\phi=q_1/q_2.h_2$, ó sea, $f=q.h$ verificándose i). De aquí y teorema 10.3, pág. 170 [1] se sigue ii). #

<u>Nota</u>. De modo natural se definen BMO(Γ) y $A_p(\Gamma)$. Si $\log w \in$ BMO(Γ) los resultados son válidos para $0<p<\infty$. Si $w \in A_\infty(\Gamma)$ entonces $H^p(\Omega,\mu)=q\ .H^p(\Omega)$ y $H^p(\Omega,\mu)$ es isomorfo a $H^p(T,\mu)$. Estos resultados se demuestran haciendo uso de la transformación conforme y del siguiente

<u>Lema</u>. Si Γ es arco cuerda se verifican:

1) $\log w \in$ BMO(Γ) si y sólo si $\log \nu \in$ BMO

2) $w \in A_\infty(\Gamma)$ si y sólo si $\nu \in A_\infty$.

<u>Bibliografía</u>

1 P. Duren: Theory of H^p spaces. Academic Press. 1970.
2 J.B. Garnett: Bounded analytic functions. Academic Press. 1981.
3 J.J. Guadalupe: Invariant subspaces and H^p spaces with respect to arbitrary measures. Boll. U.M.I. (6) 1-B 1982, 1067-1077.
4 C. Kenig: Weighted H^p spaces on lipschitz domains. Amer. J. of Math. 102 (1980), 129-163.
5 M. Rosenblum: Summability of Fourier series in $L^p(d\mu)$. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 32-42.
6 W. Rudin: Real and complex analysis. McGraw-Hill. 1974.
7 M. Zinmeister: Courbes de Jordan verifiant une condition corde-arc. Ann. Inst. Fourier, 32, No.2 , 13-21 (1982).

Dpto. Teoría de Funciones. Universidad de Zaragoza.
50009-ZARAGOZA (ESPAÑA)