SERIES DE FOURIER RESPECTO DE SISTEMAS ORTOGONALES: ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA EN ESPACIOS DE LEBESGUE Y DE LORENTZ

por

Mario Pérez Riera

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas. Realizada bajo la dirección de los Dres. D. José Javier Guadalupe Hernández y D. Francisco José Ruiz Blasco.

Julio de 1989.

Esta tesis fue publicada por la Universidad de Zaragoza: Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, sección 2, nº 24, Zaragoza, 1989.

Lo que aquí aparece es una reedición hecha en LaTeX, por lo que la paginación ha cambiado por completo con respecto al original. Sin embargo, el contenido es exactamente el mismo y se ha mantenido el aspecto siempre que ha sido posible, salvo que se han corregido varias erratas lingüísticas y actualizado dos referencias que en el momento de la publicación de la tesis estaban pendientes de aparecer. Además, es probable que con el cambio de formato (realizado, en parte, con la ayuda de `rtf2latex2e`) se hayan introducido algunas erratas.

Zaragoza, 31 de octubre de 2004.

Mario Pérez Riera
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza

mperez@unizar.es

SERIES DE FOURIER RESPECTO DE SISTEMAS ORTOGONALES: ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA EN ESPACIOS DE LEBESGUE Y DE LORENTZ

Mario Pérez Riera

Resumen: se estudia la convergencia en espacios L^p de las series de Fourier correspondientes a medidas que son suma de un peso conocido y una o varias deltas de Dirac, analizándose en particular el caso de los pesos de Jacobi generalizados, Laguerre y Hermite generalizados. Asimismo, se aborda la acotación débil (o de L^p en $L^{p,\infty}$) y la acotación débil restringida (o de $L^{p,1}$ en $L^{p,\infty}$) de las series de Fourier relativas a los polinomios de Jacobi y al sistema de Bessel. En tercer lugar, se estudian problemas relacionados con la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier, tanto para sistemas particulares como para el caso general.

FOURIER SERIES WITH RESPECT TO ORTHOGONAL SYSTEMS: A STUDY OF THE CONVERGENCE IN LEBESGUE AND LORENTZ SPACES

Abstract: we study the convergence in L^p spaces of the Fourier series corresponding to measures which are sum of a known weight and one or more mass points; in particular, the cases of generalized Jacobi, Laguerre and generalized Hermite weights are analysed. Also, we study the weak boundedness (or boundedness from L^p into $L^{p,\infty}$) and restricted weak boundedness (or boundedness from $L^{p,1}$ into $L^{p,\infty}$) of Fourier series relative to Jacobi polynomials and the Bessel system. Finally, we consider some problems related to a.e. convergence of Fourier series, both for particular systems and for the general case.

A.M.S. classification: 42C10, 33A65.

Key words and phrases: orthogonal polynomials, mean convergence, weak convergence, a.e. convergence.

El presente trabajo ha sido realizado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, bajo la dirección de los Dres. D. José Javier Guadalupe Hernández y D. Francisco José Ruiz Blasco, a quienes quiero manifestar mi sincero y profundo agradecimiento por la ayuda que me han prestado; sin ella, esta memoria no hubiera sido posible. Deseo expresar también mi gratitud hacia Juan Luis Varona Malumbres, por su ayuda y colaboración todos estos años.

Quiero dar las gracias asimismo a quienes trataron de facilitar mi trabajo, en especial a los compañeros del área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, se dice que un conjunto numerable $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ contenido en $L^2(\Omega, \mu)$ (funciones de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$) es un sistema ortonormal si

$$\int_\Omega \phi_n \overline{\phi}_m \, d\mu = \delta_{n,m} \quad \forall n, m \geq 0,$$

donde $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ y $\delta_{n,m} = 0$ si $n \neq m$. Por ejemplo, el sistema $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal sobre $\mathbb{T}$, con la medida de Lebesgue:

$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} \, dt = \delta_{n,m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Dado un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$, podemos asociar a cada función $f \in L^2(\mu)$ la serie formal

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k, \quad \text{donde } c_k = \int_\Omega f \overline{\phi}_k \, d\mu.$$

El estudio de la convergencia a la función f de esta serie, denominada serie de Fourier de f en $\{\phi_n\}$, ha dado lugar a un amplio campo de investigación, dentro del cual se enmarca la presente memoria. El problema se formula correctamente definiendo en $L^2(\mu)$ los operadores sumas parciales de la serie de Fourier, S_n, dados por:

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k.$$

El espacio $L^2(\mu)$ es de Hilbert; la teoría de espacios de Hilbert permite demostrar fácilmente que $S_n f$ es la mejor aproximación en $L^2(\mu)$ a la función f de todas las combinaciones lineales de $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Si la clausura lineal de $\{\phi_n\}$ es densa en $L^2(\mu)$, se tiene entonces la convergencia de la serie de Fourier:

$$S_n f \longrightarrow f \quad \text{en } L^2(\mu), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Resuelto el problema en $L^2(\mu)$, podemos plantearlo en $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$: si el sistema $\{\phi_n\}$ es tal que $\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ (donde $1/p + 1/q = 1$), tenemos definidos los operadores S_n en $L^p(\mu)$; en este caso, ¿$S_n f \longrightarrow f$ en $L^p(\mu)$, $\forall f \in L^p(\mu)$? Una condición natural previa es que el sistema $\{\phi_n\}$ sea denso en $L^2(\mu)$ (lo que implica que lo es en $L^p(\mu)$ también). A diferencia del caso $p = 2$, no existe solución general a esta cuestión. Uno de los primeros resultados es que la convergencia en $L^p(\mu)$ de la serie de Fourier equivale a la acotación uniforme en $L^p(\mu)$ de los operadores S_n.

Volviendo al ejemplo antes citado, $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, la demostración de la convergencia de su serie de Fourier (que es la serie de Fourier clásica) para $1 < p < \infty$ se debe a M. Riesz. En efecto, es una consecuencia de su célebre teorema que establece la acotación del operador función conjugada: $\|\widetilde{f}\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$.

Otros sistemas ortonormales que han sido tratados frecuentemente son los formados por polinomios, relativos tanto a medidas sobre la circunferencia $\mathbb{T}$ como a medidas sobre $\mathbb{R}$. Algunos sistemas particulares son los de Jacobi y Jacobi generalizados (ambos sobre el intervalo $[-1,1]$), los de Laguerre (sobre $\mathbb{R}^+$) y los de Hermite y Hermite generalizados (sobre $\mathbb{R}$). Para los sistemas de Jacobi, el estudio de la convergencia de la serie de Fourier fue realizado por Pollard ([P 1], [P 2]), Newman y Rudin ([NR]) y Muckenhoupt ([Mu 1]); este último demostró la convergencia de la serie de Fourier para los sistemas de Laguerre y Hermite ([Mu 2], [Mu 3]). Para los sistemas de Jacobi generalizados, puede verse el trabajo de Badkov ([B]). Otro sistema ortonormal que podemos citar es el de Bessel (sobre el intervalo $[0,1]$), el cual no está formado por polinomios y ha sido estudiado por Benedek y Panzone ([BP 1], [BP 2]). Debemos precisar que en cado uno de estos casos la convergencia de la serie de Fourier no tiene lugar en todos los espacios $L^p(\mu)$, con $1 < p < \infty$, sino en rangos menores de p. Los métodos empleados para demostrar la convergencia en media requieren, en la mayoría de los ejemplos citados, conocer diversas estimaciones de las funciones ortonormales, así como resultados sobre la acotación de diversos operadores, algunos de ellos similares a la transformada de Hilbert. En relación con esto último, Varona ([V]) ha empleado la teoría de pesos A_p para obtener la convergencia en media de la serie de Fourier en los casos anteriores y en otros particulares, así como resultados más generales, especialmente para medidas sobre intervalos acotados en $\mathbb{R}$.

En el caso de una medida cualquiera y aun cuando el sistema ortonormal esté formado por polinomios, los avances son, naturalmente, de menor alcance. Existen algunos resultados sobre estimaciones de los polinomios, de sus coeficientes directores y de otros parámetros asociados, sobre todo para medidas sobre la circunferencia unidad, $\mathbb{T}$; muchos de ellos se han trasladado también a medidas sobre el intervalo $[-1,1]$, ya que es posible relacionar sus respectivos sistemas de polinomios ortonormales. En cuanto a la convergencia en media de la serie de Fourier, podemos mencionar apenas los trabajos de Newman y Rudin ([NR]) y Máté, Nevai y Totik ([MNT 1]), que establecen condiciones necesarias para dicha convergencia. En particular, el trabajo de los tres últimos autores es de especial interés, ya que en todos los ejemplos conocidos a los que es aplicable las condiciones necesarias que plantea coinciden también con las condiciones suficientes para la convergencia en media. Ello ha supuesto el punto de partida de esta memoria en dos direcciones: por un lado, nos ha llevado a estudiar la convergencia débil de la serie de Fourier, con el fin de ver si las condiciones de Máté, Nevai y Totik son también necesarias para esta convergencia, como en efecto se ha probado. Por otro, el hecho de que las condiciones se refieran tan sólo a la parte absolutamente continua de la medida plantea una pregunta sobre el papel de la parte singular; en la memoria estudiamos medidas que consisten en añadir a algunas de las citadas anteriormente varias deltas de Dirac y obtenemos los rangos de p para los cuales se verifica la convergencia en $L^p(\mu)$, rangos que coinciden en todos los casos con los de las medidas de partida.

Otro tipo de convergencia que se aborda con frecuencia en la literatura es la convergencia en casi todo punto. Podemos situar el origen de esta cuestión en la conjetura de Lusin (1915): la serie de Fourier trigonométrica (relativa al sistema $\{e^{int}\}$ sobre $\mathbb{T}$) converge en casi todo punto a f para toda $f \in L^2$. La demostración de esta conjetura se debe, como es sabido, a Carleson ([C]) y su extensión a L^p, $1 < p < \infty$, a Hunt ([Hu 2]). El resultado demostrado por Carleson para el sistema trigonométrico, y del cual se deduce no sólo la convergencia en casi todo punto sino también la convergencia en media, es que el operador

$$S^*f(x) = \sup_n |S_n f(x)|$$

está acotado en L^2. En general, si el sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ es denso, la acotación del correspondiente S^* (operador maximal de las sumas parciales de la serie de Fourier) en un $L^p(\mu)$ implica la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier. Esta es la propiedad que utilizamos para, basándonos es un trabajo de Gilbert ([G]), estudiar la convergencia en casi todo punto para algunos sistemas particulares.

La presente memoria está dividida en cuatro capítulos. El capítulo I tiene carácter básicamente introductorio, con alguna aportación nueva. En él, anunciamos los conceptos y resultados que se necesitarán en el resto del trabajo. A excepción de unos pocos casos que se señalan explícitamente, a lo largo de la memoria omitimos la demostración de las propiedades conocidas que se van a utilizar, indicando, dentro de lo posible, su origen. En este capítulo hacemos en primer lugar un breve resumen de la teoría de sistemas ortonormales, incluido un catálogo de algunos sistemas concretos y sus propiedades más relevantes. En un segundo apartado, se presenta la definición y algunas propiedades elementales de los espacios $L^{p,r}$ de Lorentz, fundamentalmente los teoremas de interpolación de operadores de tipo fuerte, débil y débil restringido. Para terminar, se describen las clases de pesos A_p de Muckenhoupt y su relación con la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood y la transformada de Hilbert. Consideramos el caso particular de los pesos radiales, con las caracterizaciones obtenidas por Varona ([V]) acerca de la pertenencia a una clase A_p, y presentamos en esquema cómo se aplica esta teoría al estudio de la convergencia en media de la serie de Fourier.

En el capítulo II se trata la acotación débil de la serie de Fourier. Encontramos condiciones necesarias para dicha acotación para sistemas bastante generales de polinomios ortonormales. En el segundo apartado, aplicamos estos resultados a la serie de Fourier-Jacobi y estudiamos también la acotación débil restringida (que equivale a la acotación $L^{p,1} \longrightarrow L^{p,\infty}$). El estudio de la convergencia débil se analiza asimismo para las series de Bessel.

El capítulo III se dedica a la convergencia en media para sistemas de polinomios relativos a medidas que son suma de una medida dada y varias deltas de Dirac. La motivación de este estudio reside en que la mayoría de los resultados generales sobre sistemas de polinomios ortonormales se demuestran imponiendo condiciones sobre la parte absolutamente continua de la medida. Por otra parte, no había sido estudiada hasta ahora la convergencia de la serie de Fourier con respecto a medidas no absolutamente continuas; el primer ejemplo que conocemos se debe a Varona ([V]), que considera la medida $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx + M\delta_1(x) + N\delta_{-1}(x)$. En este capítulo, obtenemos resultados que relacionan la convergencia de las series de Fourier correspondientes a una medida y a su modificada por deltas de Dirac.

El último capítulo se aparta de los dos anteriores, ya que en él se hace un estudio de la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier. Por ello, incluimos una primera parte de introducción específica a este tema. Tras ello, generalizamos un teorema de Gilbert ([G]) utilizando la teoría de pesos A_p, lo que nos permite plantear condiciones que garantizan la acotación del operador maximal de las sumas parciales de la serie de Fourier y, por lo tanto, la convergencia en casi todo punto de la serie. Para terminar, se establecen condiciones necesarias para la convergencia en casi todo punto, similares a las obtenidas para la convergencia débil en el capítulo II y, por Máté, Nevai y Totik ([MNT 1]), para la convergencia en media.

ÍNDICE

CAPÍTULO I
Preliminares

§1. Sistemas ortonormales

Sea un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, con μ una medida positiva y σ-finita (todas las medidas que consideremos serán positivas y σ-finitas, aunque no lo digamos expresamente). Dado $p \in [1, \infty)$, denotaremos por $L^p(\Omega, \mu)$ o $L^p(\mu)$, como es habitual, al espacio de las funciones reales μ-medibles f tales que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Denotaremos por $L^\infty(\Omega, \mu)$ o $L^\infty(\mu)$ al espacio de las funciones reales μ-medibles f esencialmente acotadas y escribiremos

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{esn} |f(x)|.$$

Con esta definición, $\| \ \|_{L^p(\mu)}$ es una norma y $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach, $1 \leq p \leq \infty$.

Dado $p \in [1, \infty]$, llamaremos de ahora en adelante q al exponente conjugado de p, es decir, al número q tal que $1/p + 1/q = 1$, admitiendo que para $p = 1$ se tiene $q = \infty$ y viceversa. Es conocida entonces la desigualdad de Hölder: si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$,

$$\left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Si $1 \leq p < \infty$, $L^q(\mu)$ es el espacio dual de $L^p(\mu)$. Se tiene:

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup \left\{ \left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| ; \|g\|_{L^q(\mu)} = 1 \right\}.$$

A partir de ahora, supondremos siempre $1 < p < \infty$, a menos que indiquemos lo contrario. De todos estos espacios, $L^2(\mu)$ resulta ser un espacio de Hilbert, con el producto $\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \, d\mu$. Por lo tanto, podemos considerar en $L^2(\mu)$ sistemas ortonormales $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$, es decir, tales que

$$\int_\Omega \phi_n \phi_m \, d\mu = \delta_{n,m} \ \forall n, m \geq 0.$$

A cada $f \in L^2(\mu)$ podemos asociarle sus coeficientes de Fourier con respecto a $\{\phi_n\}$,

$$c_k(f) = \int_\Omega f \phi_k \, d\mu$$

y, formalmente, su serie de Fourier:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\phi_k.$$

Tomemos las sumas parciales de la serie de Fourier con respecto al sistema $\{\phi_n\}$, que podemos expresar de la siguiente manera:

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k(x) = \int_\Omega f(y)K_n(x,y)\,d\mu(y),$$

donde $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x)\phi_k(y)$. Llamaremos núcleos asociados a $\{\phi_n\}$ a las funciones $K_n(x,y)$, $n \geq 0$.

Si el sistema $\{\phi_n\}$ es completo en $L^2(\mu)$ (es decir, su clausura lineal es densa), entonces las sumas parciales $S_n f$ de la serie de Fourier de cualquier función $f \in L^2(\mu)$ convergen a f:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{L^2(\mu)} = 0.$$

Además, $S_n f$ es la combinación lineal de $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ que mejor aproxima a f. Por otra parte, $\|S_n f\|_{L^2(\mu)} \leq \|f\|_{L^2(\mu)}$. Es decir, los operadores

$$\begin{aligned} S_n : L^2(\mu) &\longrightarrow L^2(\mu) \\ f &\longrightarrow S_n f \end{aligned}$$

están uniformemente acotados (y $\|S_n\| \leq 1\ \forall n$).

A la vista de lo que sucede en $L^2(\mu)$, podemos preguntarnos si el comportamiento de las sumas parciales S_n es el mismo en cualquier $L^p(\mu)$. Concretamente:

$$¿\forall f \in L^p(\mu),\ S_n f \longrightarrow f \text{ en } L^p(\mu)?$$

¿los operadores $S_n : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$ están uniformemente acotados?

Un requisito previo que debe cumplir el sistema $\{\phi_n\}$ para que exista $S_n f$ y esté en $L^p(\mu)$ para toda $f \in L^p(\mu)$ es:

$$\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)\ \forall n \geq 0. \tag{1.1}$$

Si además $\{\phi_n\}$ es completo en $L^p(\mu)$, las dos preguntas anteriores son una misma. Por su sencillez, damos la demostración de este resultado clásico:

Teorema 1.1. *Sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal y completo en $L^2(\mu)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)\ \forall n \geq 0$. Entonces:*

$$S_n f \longrightarrow f \text{ en } L^p(\mu),\ \forall f \in L^p(\mu) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ tal que } \|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}\ \forall f \in L^p(\mu),\ \forall n \geq 0.$$

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea $f \in L^p(\mu)$. Entonces, $\exists C_f$ tal que $\|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C_f$ $\forall n \geq 0$. Por el principio de acotación uniforme (teorema de Banach-Steinhaus), $\exists C > 0$ tal que $\|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}$ $\forall f \in L^p(\mu)$, $\forall n \geq 0$.
$\Leftarrow$) Si ϕ es una combinación lineal de $\{\phi_n\}$, es inmediato observar que $S_n\phi = \phi$ para n suficientemente grande, con lo que

$$\begin{aligned}\|S_n f - f\|_{L^p(\mu)} &= \|S_n(f-\phi) - (f-\phi)\|_{L^p(\mu)} \leq \\ &\leq \|S_n(f-\phi)\|_{L^p(\mu)} + \|f-\phi\|_{L^p(\mu)} \leq (C+1)\|f-\phi\|_{L^p(\mu)}.\end{aligned}$$

Fijado $\varepsilon > 0$, basta tomar ϕ tal que $\|f-\phi\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon/(C+1)$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_n f - f\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Notas:

a) De ahora en adelante indicaremos con C una constante, pero posiblemente distinta cada vez que aparezca.

b) Frecuentemente, escribiremos sólo $\|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}$ para indicar que $\forall f \in L^p(\mu)$ $\exists S_n f \in L^p(\mu)$ y $\|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}$ $\forall n \geq 0$, con una constante C independiente de f y de n.

En virtud del teorema 1.1, hablaremos indistintamente de acotación o de convergencia en media de la serie de Fourier. Un segundo avance en el estudio de esta acotación es el siguiente:

Teorema 1.2.

a) Si $1 \leq r < s \leq \infty$ *y existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)} \ \forall f \in L^p(\mu),\ \forall n \geq 0,$$

con $p = r, s$, *entonces también se verifica la desigualdad con* $p \in (r, s)$.

b) Si $1 < p < \infty$ *y* $1/p + 1/q = 1$, *entonces:*

$$\begin{aligned}&\exists C > 0 \text{ tal que } \|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)} \ \forall f \in L^p(\mu),\ \forall n \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ tal que } \|S_n f\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f\|_{L^q(\mu)} \ \forall f \in L^q(\mu),\ \forall n \geq 0.\end{aligned}$$

La parte a) es consecuencia de la teoría de interpolación de operadores (véase [SW], capítulo V). La parte b) se debe a que S_n es un operador autoadjunto, por lo que está acotado en $L^p(\mu)$ si y sólo si lo está en $L^q(\mu)$, y tiene la misma norma en ambos espacios.

Según el teorema anterior, el conjunto de los p para los cuales las sumas parciales de la serie de Fourier están uniformemente acotadas es un intervalo. Le llamaremos intervalo de convergencia en media. Además, los extremos del intervalo son exponentes conjugados. En el caso general, poco más se puede decir sobre él. Los avances en esta dirección han sido generalmente acerca de sistemas concretos, algunos de los cuales veremos más adelante.

Sea μ una medida y $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal con respecto a μ. Si w es una función μ-medible, entonces $\{w\phi_n\}$ es un sistema ortonormal con respecto a $w^{-2}\,d\mu$:

$$\int_\Omega (w\phi_n)(w\phi_m)w^{-2}\,d\mu = \int_\Omega \phi_n\phi_m\,d\mu = \delta_{n,m}.$$

Sean S_n y S'_n los operadores sumas parciales con respecto a $\{\phi_n\}$ y $\{w\phi_n\}$, respectivamente. Entonces,

$$S'_n f = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_\Omega f w\phi_k w^{-2}\,d\mu \right) w\phi_k = w \sum_{k=0}^{n} \left(\int_\Omega w^{-1} f\phi_k\,d\mu \right) \phi_k = wS_n(w^{-1}f).$$

De esta fórmula se deduce la siguiente relación entre la acotación de S_n y la de S'_n:

$$\begin{gathered}
\|S'_n f\|_{L^p(w^{-2}\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(w^{-2}\,d\mu)} \ \forall f \in L^p(w^{-2}\,d\mu) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \|wS_n(w^{-1}f)\|_{L^p(w^{-2}\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(w^{-2}\,d\mu)} \ \forall f \in L^p(w^{-2}\,d\mu) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \|S_n(w^{-1}f)\|_{L^p(w^{p-2}\,d\mu)} \le C\|w^{-1}f\|_{L^p(w^{p-2}\,d\mu)} \ \forall f \in L^p(w^{-2}\,d\mu) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \|S_n g\|_{L^p(w^{p-2}\,d\mu)} \le C\|g\|_{L^p(w^{p-2}\,d\mu)} \ \forall g \in L^p(w^{p-2}\,d\mu),
\end{gathered}$$

este último paso haciendo el cambio de notación $g = w^{-1}f$. Esto nos lleva a estudiar acotaciones de las sumas parciales de la serie de Fourier con pesos (funciones medibles y no negativas); es decir, del tipo:

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(u^p\,d\mu)}$$

(escribimos u^p en lugar de u por conveniencia, como veremos en seguida). Otra razón para estudiar esta clase de acotaciones es la posibilidad de ampliar con ello el intervalo de convergencia en media, o sea, el intervalo de p para los cuales existe $C > 0$ tal que se verifica la anterior desigualdad. Con más generalidad, podemos estudiar acotaciones con dos pesos:

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu), \ \forall n \ge 0. \tag{1.2}$$

Haciendo $g = vf$, se ve que esto equivale a:

$$\|uS_n(v^{-1}g)\|_{L^p(d\mu)} \le C\|g\|_{L^p(d\mu)} \ \forall g \in L^p(d\mu), \ \forall n \ge 0;$$

de nuevo, por teoría de interpolación, el conjunto de p para los cuales esta desigualdad se verifica es un intervalo, aunque ahora sus extremos no tienen por qué ser conjugados, como en el teorema 1.2.

La condición que deben cumplir los pesos u y v para que esté definida $S_n f$ y esté en $L^p(u^p\,d\mu)$ para toda $f \in L^p(v^p\,d\mu)$ y $\forall n \geq 0$ es

$$\phi_n \in L^p(u^p\,d\mu) \cap L^q(v^{-q}\,d\mu)\ \forall n \geq 0,$$

que generaliza (1.1). Podemos preguntarnos si también ahora la acotación (1.2) equivale a la convergencia en media, es decir, a

$$S_n f \longrightarrow f \text{ en } L^p(u^p\,d\mu)\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu).$$

Necesitamos para ello que $L^p(v^p\,d\mu)$ esté contenido en $L^p(u^p\,d\mu)$; esto se cumple si $u \leq Cv$ μ-a.e. para alguna constante $C > 0$. Con esta condición adicional, el teorema 1.1 sigue siendo válido y su demostración es análoga:

Teorema 1.3. *Sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal en $L^2(d\mu)$, $1 < p < \infty$, $1/p+1/q = 1$. Sean u y v dos pesos tales que $u \leq Cv$ μ-a.e. para alguna constante C positiva, la clausura lineal de $\{\phi_n\}$ es densa en $L^p(v^p\,d\mu)$ y $\forall f \in L^p(v^p\,d\mu)$ $\exists S_n f \in L^p(u^p\,d\mu)$. Entonces:*

$$S_n f \longrightarrow f \text{ en } L^p(u^p\,d\mu),\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ tal que } \|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \geq 0.$$

También para la acotación (1.2) la condición $u \leq Cv$ parece bastante natural y en algún caso se puede ver su necesidad, como demostramos a continuación:

Teorema 1.4. *Sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal en $L^2(d\mu)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sea u un peso tal que la clausura lineal de $\{\phi_n\}$ es densa en $L^p(u^p\,d\mu)$. Supongamos que $\forall f \in L^p(u^p\,d\mu)$ $\exists S_n f \in L^p(u^p\,d\mu)$ y existe una constante C tal que $\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p\,d\mu)}$ $\forall f \in L^p(u^p\,d\mu)$, $\forall n \geq 0$.*
Si v es otro peso y existe una constante C tal que

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \geq 0,$$

entonces existe $C > 0$ tal que $u \leq Cv$ μ-a.e.

Demostración:
Según el teorema 1.3, $\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \longrightarrow \|f\|_{L^p(u^p\,d\mu)}$ $\forall f \in L^p(u^p\,d\mu)$.
Supongamos que no existe ninguna constante C tal que $u \leq Cv$ μ-a.e. Vamos a hallar una sucesión de funciones $\{f_k\}_{k\geq 0}$ tal que

$$\|f_k\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \leq C,$$

pero

$$\sup_k \|f_k\|_{L^p(u^p\,d\mu)} = +\infty.$$

Si conseguimos esto, tendremos: por una parte,

$$\|S_n f_k\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f_k\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \le C \ \forall n, k.$$

y por otra, $\forall k \ge 0$,

$$\|S_n f_k\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \longrightarrow \|f_k\|_{L^p(u^p\,d\mu)},$$

luego

$$\sup_{n,k} \|S_n f_k\|_{L^p(u^p\,d\mu)} = +\infty,$$

con lo que habremos llegado a una contradicción y el teorema estará probado. Sea, para cada $k \ge 0$, $A_k = \{x; u(x) \ge kv(x)\}$; entonces,

$$\|\chi_{A_k}\|_{L^p(u^p\,d\mu)} > 0,$$

ya que de lo contrario sería $u \equiv 0$ μ-a.e. en A_k y $u \le kv$ μ-a.e. Podemos suponer también $\|\chi_{A_k}\|_{L^p(u^p\,d\mu)} < \infty$, porque si no es así tomamos un subconjunto de A_k que cumpla estas dos condiciones (la medida, como siempre, es σ-finita). Definamos

$$f_k = \frac{k}{\|\chi_{A_k}\|_{L^p(u^p\,d\mu)}}\chi_{A_k}.$$

Está claro que $\|f_k\|_{L^p(u^p\,d\mu)} = k$. Y como $v \le k^{-1}u$ en A_k, se tiene:

$$\|f_k\|_{L^p(v^p\,d\mu)} = \frac{k}{\|\chi_{A_k}\|_{L^p(u^p\,d\mu)}}\|\chi_{A_k}\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \le 1 \ \forall k \ge 0.$$

Esta es la sucesión de funciones que buscamos, con lo que el teorema está probado.

Para una situación general, Newman y Rudin ([NR]) demostraron la siguiente condición necesaria para la acotación en media:

Teorema 1.5. *Sean $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal en $L^2(\mu)$, $1 < p < \infty$, u y v dos pesos. Si para cada $f \in L^p(v^p\,d\mu)$ existen las sumas parciales $S_n f$ de la serie de Fourier de f con respecto a $\{\phi_n\}$ y*

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}$$

entonces

$$\|\phi_n\|_{L^p(u^p\,d\mu)}\|\phi_n\|_{L^q(v^{-q}\,d\mu)} \le C.$$

A continuación veremos una clase particular de sistemas ortonormales: la de los sistemas formados por polinomios. La mayor parte de los resultados que vamos a exponer pueden consultarse en [Sz 2], por ejemplo.

SISTEMAS DE POLINOMIOS ORTOGONALES

A partir de ahora, todas las medidas que consideremos serán, además de positivas y σ-finitas, medidas de Borel sobre $\mathbb{R}$ y con soporte infinito. Llamaremos $\operatorname{sop} d\mu$ a su soporte y μ' a su parte absolutamente continua. Si μ es una medida tal y para cada $n \geq 0$ existen los momentos

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \, d\mu(x) \in \mathbb{R},$$

es conocido que existe un único sistema ortonormal $\{P_n\}$ tal que para cada $n \geq 0$, P_n es un polinomio de grado n y coeficiente director positivo. Además, si el soporte de μ está acotado, del teorema de Weierstrass se sigue que la familia $\{P_n\}$ es completa en $L^2(\mu)$. Como veremos más adelante, la mayoría de los sistemas clásicos de polinomios se definen de manera que los P_n no están normalizados; es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} P_n P_m \, d\mu = h_n \delta_{n,m}.$$

Si esto es así, el sistema ortonormal es $\{h_n^{-1/2} P_n\}$.

Si $\{P_n\}$ es un sistema ortonormal de polinomios, denotaremos por k_n al coeficiente director de P_n. Una consecuencia inmediata es:

Proposición 1.6. *Si $R_n(x) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_0$ es un polinomio, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} P_n R_n \, d\mu = \frac{r_n}{k_n}.$$

En particular, $\int_{\mathbb{R}} P_n R \, d\mu = 0$ si R es un polinomio de grado menor que n.

Es conocido que la sucesión $\{P_n\}$ verifica una relación de recurrencia:

$$xP_n(x) = a_{n+1} P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_n P_{n-1}(x), \tag{1.3}$$

lo que se deduce de poner $xP_n(x)$ como combinación lineal de $\{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ y aplicar la ortonormalidad de $\{P_n\}$. En particular, de la proposición anterior se deduce:

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x P_n(x) P_{n-1}(x) \, d\mu(x), \qquad b_n = \int_{\mathbb{R}} x P_n(x)^2 \, d\mu(x).$$

Si μ es una medida par, entonces se tiene $b_n = 0$. Esta es una manera de demostrar la siguiente propiedad:

Proposición 1.7. *Si μ es una medida par, los polinomios P_{2n} son pares y los polinomios P_{2n+1} son impares.*

Sobre los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de la relación de recurrencia se conoce su comportamiento, bajo ciertas condiciones ([R 1], pág. 212, o [MNT 2], teorema 10):

Teorema 1.8. *Si* $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$ *y* $\mu' > 0$ *en casi todo punto de* $[-1,1]$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Si el sistema $\{P_n\}$ es un sistema de polinomios, también la sucesión $\{K_n(x,y)\}$ de los núcleos está formada por polinomios. Una caracterización que se prueba fácilmente es:

Proposición 1.9. *Sea* $n \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$. *Entonces, para todo polinomio* R *de grado menor o igual que* n *se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x,y) R(x)\, d\mu(x) = R(y).$$

Además, $K_n(x,y)$ *es el único polinomio de grado* n *que verifica esta propiedad.*

Puesto que las sumas parciales de la serie de Fourier vienen dadas por

$$S_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} K_n(x,y) f(y)\, d\mu(y),$$

es importante encontrar expresiones para $K_n(x,y)$ distintas de la poco manejable $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_n(x)P_n(y)$. A partir de la relación de recurrencia (1.3) no es difícil demostrar, por inducción, la fórmula de Christoffel-Darboux:

$$K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}.$$

Sin embargo, esta fórmula tampoco es útil, en muchas ocasiones. En 1948, Pollard (véase [P 1]) demostró la siguiente descomposición para medidas μ con soporte en $[-1,1]$:

$$K_n(x,t) = r_n T_1(n,x,t) + s_n T_2(n,x,t) + s_n T_3(n,x,t)$$

con

$$T_1(n,x,t) = P_{n+1}(x)P_{n+1}(t),$$
$$T_2(n,x,t) = (1-t^2)\frac{P_{n+1}(x)Q_n(t)}{x-t}$$

y

$$T_3(n,x,t) = T_2(n,t,x) = (1-x^2)\frac{P_{n+1}(t)Q_n(x)}{t-x},$$

donde $\{Q_n\}$ son los polinomios ortonormales con respecto a $(1-x^2)\, d\mu$.

Además, si $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto, entonces se tiene: $\lim_{n\to\infty} r_n = -1/2$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/2$ (véase [V], lema 3.1). Debido a esta descomposición, es fundamental conocer estimaciones de los polinomios $\{P_n\}$ (y de los $\{Q_n\}$). A este respecto, merece destacarse el siguiente resultado, probado por Máté, Nevai y Totik ([MNT 1]):

Lema 1.10. *Sea* $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$ *y* $\mu' > 0$ *en casi todo punto de* $[-1,1]$. *Dados un número real* c *y un entero no negativo* n, *sea*

$$B_{c,n}(d\mu) = \{x \in (-1,1); P_n(x)^2 \mu'(x)(1-x^2)^{1/2} \geq c\}.$$

Entonces, para cada $c > 2/\pi$, $\text{lím}_{n\to\infty} |B_{c,n}(d\mu)| = 0$, *donde* $|E|$ *denota la medida de Lebesgue del conjunto* E.

Además de esta acotación superior para los polinomios, en el mismo trabajo ([MNT 1], teorema 2) se demuestra una acotación inferior para sus normas, que podemos formular de la siguiente manera:

Teorema 1.11. *Sea* $d\mu$ *una medida sobre* $[-1,1]$ *y* $\mu' > 0$ *en casi todo punto. Sea* $0 < p \leq \infty$. *Existe una constante* C *tal que, si* g *es una función medible Lebesgue en* $[-1,1]$, *entonces:*

$$\|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4} g(x)\|_{L^p(dx)} \leq C \varliminf_{n\to\infty} \|P_n g\|_{L^p(dx)}.$$

En particular, si $\varliminf_{n\to\infty} \|P_n g\|_{L^p(dx)} = 0$, *entonces* $g = 0$ *en casi todo punto.*

A partir de este teorema y del teorema 1.5, se obtienen las siguientes condiciones necesarias para la convergencia en media de la serie de Fourier:

Teorema 1.12. *Sea* $d\mu$ *una medida sobre* $[-1,1]$, $\mu' > 0$ *en casi todo punto y* $\{P_n\}$ *sus polinomios ortonormales. Sean* u *y* v *dos pesos y* $1 < p < \infty$. *Si para cada* $f \in L^p(v^p\, d\mu)$ *existen las sumas parciales* $S_n f$ *de la serie de Fourier de* f *con respecto a* $\{P_n\}$ *y*

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\, d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(v^p\, d\mu)},$$

entonces:

$$\begin{gathered} u \in L^p(d\mu), \\ v^{-1} \in L^q(d\mu), \\ \mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4} u(x) \in L^p(\mu'), \\ \mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4} v(x)^{-1} \in L^q(\mu'). \end{gathered}$$

Vamos a describir ahora algunos de los sistemas ortogonales más comunes. De cada uno de ellos exponemos brevemente algunas propiedades que nos serán útiles (principalmente, acotaciones de las funciones que lo componen), así como resultados sobre convergencia en media de la serie de Fourier.

ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES

Polinomios de Jacobi.

Sean $\alpha, \beta > -1$ y $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ sobre el intervalo $[-1,1]$. Los polinomios de Jacobi $\{P_n^{\alpha,\beta}\}$ son ortogonales con respecto a $d\mu$. De acuerdo con su definición clásica, no están normalizados, sino que

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta} P_m^{\alpha,\beta}\,d\mu = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{n,m},$$

con

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Por lo tanto, $\{(h_n^{\alpha,\beta})^{-1/2}P_n^{\alpha,\beta}\}$ es el sistema de polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$. Por tratarse de una medida finita sobre un intervalo compacto, los polinomios son densos en $L^2(d\mu)$ y el sistema es completo.

A partir de estimaciones conocidas (véase [Sz 2], capítulo VIII), Muckenhoupt demostró ([Mu 1]) que existe una constante positiva C tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,1]$,

$$\left|(h_n^{\alpha,\beta})^{-1/2}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}. \tag{1.4}$$

Cuando $\alpha, \beta \ge -1/2$, de esta se deduce otra acotación global (independiente de n):

$$\left|(h_n^{\alpha,\beta})^{-1/2}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le C\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4};$$

en este caso, con la notación del lema 1.10 resulta $B_{c,n}(d\mu) = \emptyset$. Es fácil ver que en el caso general $\alpha, \beta > -1$, $|B_{c,n}(d\mu)| \le n^{-2}$.

Basándose en esta cota, Muckenhoupt obtuvo en 1969 ([Mu 1]) el siguiente resultado:

Teorema 1.13. *Sean $\alpha, \beta > -1$, $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ sobre el intervalo $[-1,1]$ y $\{S_n\}$ las sumas parciales de la serie de Fourier relativa a los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$. Sea $1 < p < \infty$ y*

$$u(x) = (1-x)^a(1+x)^b.$$

Entonces, existe una constante positiva C tal que

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(u^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(u^p\,d\mu),\ \forall n \ge 0$$

si y sólo si se cumplen las desigualdades:

$$a + (\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{4}, \qquad b + (\beta+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{4} \tag{1.5}$$

(1.6) $$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{\alpha+1}{2}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{\beta+1}{2}$$

(1.7) $$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{1}{4}$$

(1.8) $$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{\alpha+1}{2}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{\beta+1}{2}$$

Para el caso $\alpha,\beta \geq -1/2$ y $a=b=0$, Pollard había demostrado en 1948 ([P 1]) que (1.5),..., (1.8) implican la convergencia en media. En 1952, Newman y Rudin ([NR]) probaron que esas condiciones son necesarias para la convergencia. Finalmente, Muckenhoupt extendió el resultado al caso general en el trabajo citado.

Polinomios de Jacobi generalizados.

Por un peso de Jacobi generalizado se entiende (véase, por ejemplo, [B] o [Nv], pág. 169) un peso w sobre $[-1,1]$ de la forma:

$$w(x)=h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{\gamma_i},\ x\in[-1,1],$$

donde:

a) $\alpha,\beta,\gamma_i>-1$, $t_i\in(-1,1)$, $t_i\neq t_j$ $\forall i\neq j$;

b) h es una función continua y positiva en $[-1,1]$ y $\omega(h,\delta)\delta^{-1}\in L^1(0,2)$, siendo $\omega(h,\delta)$ el módulo de continuidad de h.

Llamaremos polinomios de Jacobi generalizados al sistema ortonormal de polinomios $\{P_n\}$ asociado a $d\mu=w(x)\,dx$. Los polinomios de Jacobi son un caso particular, con $\gamma_i=0$ $\forall i$, $h\equiv 1$. Como en el caso de los polinomios de Jacobi, $\{P_n\}$ es un sistema completo en $L^2(d\mu)$, por ser $[-1,1]$ compacto y $d\mu$ finita.

Los polinomios $\{P_n\}$ satisfacen la acotación (véase [B]):

(1.9) $$|P_n(x)|\leq C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2},$$

donde $n\in\mathbb{N}$, $x\in[-1,1]$ y C no depende de n ni de x.

Para la sucesión $\{K_n(x,y)\}$ de los núcleos existen también estimaciones, una de las cuales es la que a continuación vemos. Antes necesitamos alguna notación, que nos será útil en toda esta memoria:

Notación: dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ y un subconjunto D de $\mathbb{R}^k$, diremos que $f \sim g$ en D si existen dos constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que $\forall x \in D$, $K_1 f(x) \leq g(x) \leq K_2 f(x)$.

Con este convenio, se tiene la siguiente estimación ([Nv], pág. 120 y pág. 4):

$$K_n(x,x) \sim n(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/2}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/2}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i} \tag{1.10}$$

para $x \in [-1,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.

La acotación uniforme de los operadores S_n ha sido estudiada por Badkov ([B]) y Varona ([V]). El primero consideró el caso de un solo peso:

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p\,d\mu)}$$

donde $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b\prod_{i=1}^N |x-t_i|^{g_i}$. Su método se basa en estimar directamente los núcleos $K_n(x,y)$. Además de esta acotación (y, por lo tanto, convergencia en media), Badkov analizó también la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier.

La acotación con dos pesos $\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}$, donde

$$u(x) = (1-x)^a(1+x)^b\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{g_i}$$

y

$$v(x) = (1-x)^A(1+x)^B\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{G_i},$$

ha sido estudiada por Varona ([V], corolario 3.11) en el caso $\gamma_i \geq 0$ $\forall i$, siguiendo otro método totalmente distinto, consistente en el uso de la teoría de pesos A_p, que comentaremos más adelante. El resultado completo puede enunciarse como sigue:

Teorema 1.14. *Sean $w(x) = h(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\prod_{i=1}^N |x-t_i|^{\gamma_i}$ un peso de Jacobi generalizado, $d\mu(x) = w(x)\,dx$ sobre $[-1,1]$, $1 < p < \infty$,*

$$u(x) = (1-x)^a(1+x)^b\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{g_i}$$

y

$$v(x) = (1-x)^A(1+x)^B\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{G_i}.$$

Si se cumplen las desigualdades

(1.11) $A+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}; \quad B+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}; \quad G_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}\ \forall i;$

(1.12)
$A+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\alpha+1}{2}; \quad B+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\beta+1}{2}; \quad G_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\gamma_i+1}{2}\ \forall i;$

(1.13)
$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}; \quad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}; \quad g_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{2}\ \forall i;$

(1.14)
$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\alpha+1}{2};\ b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\beta+1}{2};\ g_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\gamma_i+1}{2}\ \forall i;$

(1.15) $$A \le a; \quad B \le b; \quad G_i \le g_i\ \forall i;$$

entonces $\exists C > 0$ *tal que*

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pero también el recíproco es cierto:

Teorema 1.15. *Con la misma notación, si* $\exists C > 0$ *tal que*

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces se verifican las condiciones (1.11),..., (1.15).

Demostración:
Que las condiciones (1.11),..., (1.14) son necesarias se deduce del teorema 1.12, como puede verse en [V] (corolario 3.13). Sólo falta probar que también debe cumplirse (1.15): $A \le a$, $B \le b$, $G_i \le g_i\ \forall i$.
Supongamos, por ejemplo, que $a < A$ (en los demás casos, se procede de igual manera). Las desigualdades (1.11),..., (1.14) pueden ponerse de esta manera:

$$\begin{gathered} A < (\alpha+1)(1/2-1/p)+1/4, \\ A < (\alpha+1)(1/2-1/p)+(\alpha+1)/2, \\ (\alpha+1)(1/2-1/p)-1/4 < a, \\ (\alpha+1)(1/2-1/p)-(\alpha+1)/2 < a \end{gathered}$$

y sus análogas con β y γ_i. Si definimos

$$m_\alpha = (\alpha+1)(1/2-1/p) - \text{mín}\{1/4, (\alpha+1)/2\},$$

$$\begin{aligned}
M_\alpha &= (\alpha+1)(1/2-1/p) + \text{mín}\{1/4, (\alpha+1)/2\},\\
m_\beta &= (\beta+1)(1/2-1/p) - \text{mín}\{1/4, (\beta+1)/2\},\\
M_\beta &= (\beta+1)(1/2-1/p) + \text{mín}\{1/4, (\beta+1)/2\},\\
m_i &= (\gamma_i+1)(1/2-1/p) - \text{mín}\{1/2, (\gamma_i+1)/2\},\\
M_i &= (\gamma_i+1)(1/2-1/p) + \text{mín}\{1/2, (\gamma_i+1)/2\},
\end{aligned}$$

entonces las condiciones (1.11),..., (1.14) son:

$$A < M_\alpha, \qquad m_\alpha < a \tag{1.16}$$

$$B < M_\beta, \qquad m_\beta < b \tag{1.17}$$

$$G_i < M_i, \qquad m_i < g_i \ \forall i. \tag{1.18}$$

Es inmediato comprobar que $m_\alpha < M_\alpha$, $m_\beta < M_\beta$, $m_i < M_i$. Si se tiene $a < A$, entonces $m_\alpha < a < A < M_\alpha$. Puesto que se cumplen (1.17) y (1.18), podemos tomar $\widetilde{b}$, $\widetilde{g}_i$ tales que:

$$m_\beta < \widetilde{b} < M_\beta, \qquad m_i < \widetilde{g}_i < M_i, \tag{1.19}$$

$$B \le \widetilde{b}, \qquad G_i \le \widetilde{g}_i. \tag{1.19}$$

Sea

$$\widetilde{u}(x) = (1-x)^a (1+x)^{\widetilde{b}} \prod_{i=1}^N |x-t_i|^{\widetilde{g}_i}.$$

Como

$$m_\alpha < a < M_\alpha, \quad m_\beta < \widetilde{b} < M_\beta, \quad m_i < \widetilde{g}_i < M_i,$$

el peso $\widetilde{u}$ satisface las desigualdades (1.11),..., (1.15) correspondientes a él y, por el teorema 1.14, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|S_n f\|_{L^p(\widetilde{u}^p\, d\mu)} \le C \|f\|_{L^p(\widetilde{u}^p\, d\mu)} \ \forall f \in L^p(\widetilde{u}^p\, d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.21}$$

La condición análoga a (1.14) para $\widetilde{u}$ significa que $\widetilde{u}^p\, d\mu$ es una medida finita, por lo que los polinomios son densos en $L^p(\widetilde{u}^p\, d\mu)$. Pero además, por ser $a < A$, no existe ninguna constante C positiva tal que $\widetilde{u} \le Cv$. El teorema 1.4 garantiza entonces que no existe ninguna constante C positiva tal que

$$\|S_n f\|_{L^p(\widetilde{u}^p\, d\mu)} \le C \|f\|_{L^p(v^p\, d\mu)} \ \forall f \in L^p(v^p\, d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Sea ahora $u_0(x) = (1-x)^A(1+x)^{\widetilde{b}}\prod_{i=1}^N |x-t_i|^{\widetilde{g}_i}$. El par (u_0, v) cumple las condiciones análogas a (1.11),…, (1.15). Por el teorema 1.14, existe una constante C tal que

$$\|S_n f\|_{L^p(u_0^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $t_i \in (-1, 1-\varepsilon)$ $\forall i$. De esta manera, $u_0 \sim \widetilde{u}$ en $(-1, 1-\varepsilon)$, luego

$$\|S_n f\|_{L^p((-1,1-\varepsilon),\widetilde{u}^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que la acotación (1.22) no se cumple para ninguna constante C, de esta última se deduce que tampoco se cumple la siguiente:

$$\|S_n f\|_{L^p([1-\varepsilon,1),\widetilde{u}^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, en $[1-\varepsilon, 1)$ se tiene $u \sim \widetilde{u}$. Por lo tanto, no se puede cumplir la acotación

$$\|S_n f\|_{L^p([1-\varepsilon,1),u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y esto contradice la hipótesis $\|S_n f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}$. Por lo tanto, se tiene que verificar la condición (1.15), que es lo que teníamos que demostrar.

Polinomios de Laguerre.

Los polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha\}$ de orden α son ortogonales con respecto a la medida $d\mu(x) = e^{-x}x^\alpha\,dx$ sobre $[0, +\infty)$, donde $\alpha > -1$. De acuerdo con la definición clásica, no están normalizados, sino que

$$L_n^\alpha(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}; \qquad \int_0^{+\infty} L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\,\delta_{n,m}.$$

En este caso, el soporte de la medida no es compacto, con lo que no podemos aplicar el teorema de Weierstrass que garantiza la densidad de los polinomios en las funciones continuas y llegar así a que $\{L_n^\alpha\}$ es un sistema completo en $L^2(d\mu)$. Sin embargo, esto sigue siendo cierto (véase, por ejemplo, [Sz 2], teorema 5.7.1, pág. 108).

Si hacemos $\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right)^{-1/2} L_n^\alpha(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}$, entonces el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ es ortonormal con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, +\infty)$. Para este sistema se tienen las siguientes acotaciones, obtenidas por Muckenhoupt ([Mu 3]) a partir de otras de Askey y Wainger ([AW]): existen constantes positivas C y γ tales que $\forall n$

$$
\begin{gathered}
0 \leq x \leq 1/\sigma \Rightarrow |\mathcal{L}_n^\alpha(x)| \leq C\sigma^{\alpha/2}x^{\alpha/2};\\
1/\sigma < x \leq \sigma/2 \Rightarrow |\mathcal{L}_n^\alpha(x)| \leq C\sigma^{-1/4}x^{-1/4};\\
\sigma/2 \leq x \leq 3\sigma/2 \Rightarrow |\mathcal{L}_n^\alpha(x)| \leq C\sigma^{-1/4}(\sigma^{1/3} + |x-\sigma|)^{-1/4};\\
3\sigma/2 \leq x \Rightarrow |\mathcal{L}_n^\alpha(x)| \leq Ce^{-\gamma x},
\end{gathered}
$$

donde $\sigma = 4n + 2\alpha + 2$.

La acotación en media de las sumas parciales de la serie de Fourier con respecto a los polinomios de Laguerre (normalizados) fue estudiada por Muckenhoupt en [Mu 2] y [Mu 3]. En el primero de estos trabajos demostró que no es posible la acotación

$$\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|uf\|_{L^p(d\mu)} \ \forall f, \forall n,$$

cuando $1 \leq p \leq 4/3$ o $4 \leq p \leq \infty$, para ningún peso u, a no ser que u sea cero en casi todo punto; en realidad, demostró que ni siquiera el término general de la serie puede estar acotado. En [Mu 3] se considera la acotación con dos pesos, u y v, definidos de la siguiente manera (siendo $w(x) = e^{-x}x^\alpha$):

$$u(x) = w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^a (1+x)^b, \qquad \forall x > 0$$

$$v(x) = w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^A (1+x)^B(1+\log^+ x)^\beta, \qquad \forall x > 0$$

donde $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$ y

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } b = B \text{ y } p = 4 \text{ ó } 4/3,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

En esta situación, se tiene $\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)}$ $\forall f$, $\forall n$ si se cumplen las condiciones:

$$a > -\frac{1}{p} + \max\{-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}\}; \tag{1.24}$$

$$A < 1 - \frac{1}{p} - \max\{-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}\}; \tag{1.25}$$

$$A \leq a; \tag{1.26}$$

(1.27)
$$\begin{cases} b < \frac{3}{4} - \frac{1}{p}, \\ b \le \frac{7}{12} - \frac{1}{3p}; \end{cases}$$

(1.29)
$$\begin{cases} B \ge -\frac{1}{4} - \frac{1}{3p}, \\ B > \frac{1}{4} - \frac{1}{p}; \end{cases}$$

(1.29)
$$\begin{cases} b \le B + \frac{1}{2} - \frac{2}{3p}, \\ b \le B, \\ b \le B - \frac{1}{6} + \frac{2}{3p}; \end{cases}$$

(1.30)
si en (1.29) se da alguna igualdad, entonces no se da en (1.27) ni en (1.28).

Además, todas las condiciones son necesarias, con la posible excepción de que en (1.28) se tenga la igualdad $B = \frac{1}{4} - \frac{1}{p}$ cuando $p = 4$ o $p = 4/3$ y $b = B$.

Observación: Muckenhoupt escribe las condiciones (1.27), (1.28) y (1.29) algo distintas. Por ejemplo, en (1.27) escribe

$$b < 3/4 - 1/p \text{ si } 1 < p \le 4$$

y

$$b \le 7/12 - 1/(3p) \text{ si } 4 < p < \infty.$$

Pero es fácil ver que

$$3/4 - 1/p \le 7/12 - 1/(3p) \Leftrightarrow p \le 4,$$

con lo que podemos poner simplemente (1.27). Lo mismo sucede con (1.28) y (1.29).

Relacionadas con los polinomios de Laguerre, existen otras familias de polinomios, que son los de Hermite generalizados. Son polinomios ortogonales con respecto a la medida $e^{-x^2}|x|^{2\alpha}\,dx$ sobre $\mathbb{R}$, donde $\alpha > -1/2$. Según su definición clásica, se toman con coeficiente director 2^n; no están normalizados. Satisfacen las siguientes igualdades:

$$H^{\alpha}_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m!\, L^{\alpha-1/2}_m(x^2)$$
$$H^{\alpha}_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m!\, x L^{\alpha+1/2}_m(x^2)$$

y a ellos nos referiremos más adelante. La convergencia en media de su serie de Fourier ha sido estudiada por Varona ([V], capítulo VI).

Sistema de Bessel.

El último sistema ortogonal que vamos a describir es el de Bessel, que, a diferencia de los anteriores, no está formado por polinomios.

Sea J_α la función de Bessel de orden $\alpha > -1$. Un amplio estudio de estas funciones es desarrollado en el libro de Watson ([W]), donde puede verse que, fijada $\alpha > -1$, J_α tiene un conjunto numerable de ceros en $(0, +\infty)$, todos ellos simples y cuyo único punto de acumulación es $+\infty$. Si $\{\alpha_n\}$ es esta sucesión de ceros, en orden creciente, entonces

$$\int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x) J_\alpha(\alpha_m x) x\, dx = \frac{J_{\alpha+1}(\alpha_n)^2}{2} \delta_{n,m},$$

de donde las funciones $j_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{|J_{\alpha+1}(\alpha_n)|} J_\alpha(\alpha_n x)$ forman un sistema ortonormal en $L^2((0,1), x\, dx)$, que además es completo.

Son conocidas las siguientes estimaciones asintóticas de las funciones de Bessel:

$$J_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + \mathcal{O}(z^{\alpha+2}) \text{ cuando } z \longrightarrow 0;$$
$$J_\alpha(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-1/2} \cos(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + \mathcal{O}(z^{-3/2}) \text{ cuando } z \longrightarrow \infty.$$

En el caso $\alpha \geq -1/2$ se deduce inmediatamente una acotación global: $|J_\alpha(z)| \leq C z^{-1/2}$.

Además, puede probarse que

$$\frac{\sqrt{2}}{|J_{\alpha+1}(\alpha_n)|} [\pi\alpha_n]^{-1/2} \xrightarrow{n} 1.$$

Es decir:

$$j_n(x) = C_n J_\alpha(\alpha_n x), \text{ con } \lim_{n\to\infty} C_n [\pi\alpha_n]^{-1/2} = 1. \tag{1.31}$$

La convergencia en media de la serie de Fourier con respecto al sistema de Bessel (serie de Fourier-Bessel) ha sido estudiada por Wing ([Wi]) y Benedek y Panzone (véase [BP 1], [BP 2]), quienes demostraron la siguiente descomposición de los núcleos $\{K_n(x,y)\}$ asociados a $\{j_n\}$:

$$K_n(x,y) = J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(y-x)} +$$
$$+ J_\alpha(M_n y) J_{\alpha+1}(M_n x) \frac{M_n}{2(x-y)} +$$

$$+J_\alpha(M_n x)J_{\alpha+1}(M_n y)\frac{M_n}{2(y+x)}+$$
$$+J_\alpha(M_n y)J_{\alpha+1}(M_n x)\frac{M_n}{2(x+y)}+\mathcal{O}(1)\frac{(xy)^{-1/2}}{2-x-y}+\mathcal{O}(1)(xy)^\alpha,$$

siendo $M_n = (\alpha_n + \alpha_{n+1})/2$ y las $\mathcal{O}(1)$ uniformemente acotadas con respecto a n, x e y.

Para este sistema existe un resultado similar al teorema 1.11 de Máté, Nevai y Totik (que se refiere a sistemas de polinomios). Enunciaremos más adelante esta propiedad, demostrada por Varona (véase [V], teorema 5.15). Basándose en ella y en la teoría de pesos A_p, Varona ([V], corolario 5.17) demostró:

Teorema 1.16. *Sean $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$ y los pesos*

$$u(x) = x^a(1-x)^b\prod_{k=1}^m |x-x_k|^{b_k}, \qquad v(x) = x^A(1-x)^B\prod_{k=1}^m |x-x_k|^{B_k},$$

con $0 < x_1 < \ldots < x_m < 1$, $A \le a$, $B \le b$, $B_k \le b_k$. Entonces, existe una constante positiva C tal que

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p x\,dx)} \le C\|f\|_{L^p(v^p x\,dx)}\ \forall f \in L^p(v^p x\,dx),\ \forall n \ge 0$$

si y sólo si se cumplen las desigualdades:

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{a}{4}+\frac{A}{4}\right| < \frac{a-A}{4}+\min\{\frac{1}{4},\frac{\alpha+1}{2}\},$$

$$pb > -1, \qquad pB < p-1, \qquad pb_k > -1, \qquad pB_k < p-1 \qquad \forall k.$$

§2. Espacios de Lorentz

Sea $d\mu$ una medida y $p, r \in [1, \infty]$. Diremos que un operador T es de tipo (p, r)-fuerte (o de tipo (p, r) sólo) cuando $T : L^p(d\mu) \longrightarrow L^r(d\mu)$ sea un operador acotado.

Uno de los primeros resultados que hemos visto acerca de la serie de Fourier es que el conjunto de los p para los cuales S_n es de tipo (p, p)-fuerte uniformemente es un intervalo. Como hemos comentado, es una consecuencia inmediata de un teorema de interpolación de M. Riesz (véase [Hu 1] y [SW], §V.2, para los resultados que vamos a exponer en este apartado):

Teorema 1.17. *Sea T un operador lineal de tipo (p_0, r_0) y (p_1, r_1), con normas k_0 y k_1, respectivamente. Entonces T es de tipo (p_t, r_t) con norma $k_t \leq k_0^{1-t} k_1^t$, si $t \in [0, 1]$ y*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$$

y

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1-t}{r_0} + \frac{t}{r_1}.$$

Este teorema admite una generalización a operadores de tipo (p, r)-débil. Como es conocido, dada una medida $d\mu$ y $1 \leq p < \infty$, se define $L^p_*(d\mu)$ como el espacio de las funciones medibles tales que:

$$\sup_{y>0} y^p \mu(\{x; |f(x)| > y\}) < \infty.$$

Se toma entonces

$$\|f\|_{L^p_*(d\mu)} = \sup_{y>0} y \left[\mu(\{x; |f(x)| > y\})\right]^{1/p} = \sup_{y>0} \|y \chi_{\{x;|f(x)|>y\}}\|_{L^p(d\mu)}.$$

Un operador T se dice de tipo (p, r)-débil si $T : L^p(d\mu) \longrightarrow L^r_*(d\mu)$ está acotado, es decir: si existe una constante C tal que:

$$\|Tf\|_{L^r_*(d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(d\mu)} \ \forall f \in L^p(d\mu).$$

Observación: tal como se ha definido, $\| \ \|_{L^p_*(d\mu)}$ no es una norma, ya que no se cumple la desigualdad de Minkowski, sino sólo:

$$\|f + g\|_{L^p_*(d\mu)} \leq 2\|f\|_{L^p_*(d\mu)} + 2\|g\|_{L^p_*(d\mu)}.$$

No obstante, puede definirse una norma equivalente a $\| \ \|_{L^p_*(d\mu)}$. Por comodidad, nos referiremos a $\|f\|_{L^p_*(d\mu)}$ como la norma débil de f.

La generalización de la que hemos hablado es el siguiente teorema de interpolación de Marcinkiewicz:

Teorema 1.18. *Si T es un operador subaditivo de tipo (p_0, r_0)-débil y (p_1, r_1)-débil, con $1 \leq p_i \leq r_i \leq \infty$ y $r_0 \neq r_1$, entonces T es de tipo (p_t, r_t)-fuerte, si $t \in (0, 1)$ y*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$$

y

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1-t}{r_0} + \frac{t}{r_1}.$$

Además, en este teorema la norma (p_t, r_t)-fuerte se puede acotar por una constante que depende sólo de las dos normas débiles y de t. Como consecuencia, si las sumas parciales S_n de la serie de Fourier con respecto a un sistema ortonormal son uniformemente de tipo (p_0, p_0)-débil y (p_1, p_1)-débil, con $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, entonces son uniformemente de tipo (p, p)-fuerte para todo $p \in (p_0, p_1)$. Por consiguiente, sólo pueden ser uniformemente de tipo (p, p)-débil en los extremos del intervalo de convergencia, aparte del intervalo mismo. Estudiaremos esta posibilidad en los siguientes capítulos.

Pero el teorema 1.18 puede extenderse a una clase más amplia de espacios: los espacios de Lorentz, $L^{p,r}$, que vamos a describir a continuación.

Si μ es una medida y f es una función μ-medible, su función de distribución λ se define para $y \geq 0$ como $\lambda(y) = \mu(\{x; |f(x)| > y\})$. Entonces,

$$\|f\|_{L^p_*(d\mu)} = \sup_{y>0} y\lambda(y)^{1/p}.$$

Pues bien, si denotamos por f^* el reordenamiento no creciente de f, es decir:

$$f^*(t) = \inf\{s; \lambda(s) \leq t\} \quad (t > 0),$$

f^* resulta tener la misma λ como función de distribución. Se cumple:

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^+, dt)} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

(omitiremos en adelante $\mathbb{R}^+$, por comodidad en la notación).

Además, puede verse que

$$\sup_{y>0} y\lambda(y)^{1/p} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t).$$

Es decir:

$$\|f\|_{L^p_*(d\mu)} = \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L^\infty(dt)}.$$

Si observamos que estas dos igualdades pueden ponerse de la siguiente manera:

$$\|f\|_{L^p(d\mu)} = \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L^p(t^{-1}\,dt)},$$
$$\|f\|_{L^p_*(d\mu)} = \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L^\infty(t^{-1}\,dt)},$$

resulta natural definir, para una función μ-medible f,

$$\|f\|^*_{p,r} = \left(\frac{r}{p}\int_0^{+\infty} [t^{1/p} f^*(t)]^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r}$$

si $1 \leq p < \infty$, $1 \leq r < \infty$ y

$$\|f\|^*_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t)$$

si $1 \leq p \leq \infty$.

Observación 1.19: la constante r/p se introduce para lograr

$$\|\chi_E\|^*_{p,r} = \{\mu(E)\}^{1/p} = \|\chi_E\|_{L^p(d\mu)}$$

para todo r.

Definición 1.20. Se llama espacio de Lorentz a

$$L^{p,r}(d\mu) = \{f; \|f\|^*_{p,r} < \infty\}.$$

Según lo que acabamos de ver,

$$L^{p,p}(d\mu) = L^p(d\mu), \qquad \|f\|^*_{p,p} = \|f\|_{L^p(d\mu)},$$

$$L^{p,\infty}(d\mu) = L^p_*(d\mu), \qquad \|f\|^*_{p,\infty} = \|f\|_{L^p_*(d\mu)}. \tag{1.32}$$

En general, $\| \ \|^*_{p,r}$ no es una norma, porque no cumple la desigualdad de Minkowski, como hemos comentado para $\|f\|_{L^p_*(d\mu)}$. Pero también en este caso existe una norma equivalente, $\| \ \|_{p,r}$. Dotados con esta norma, los espacios $L^{p,r}(d\mu)$ son espacios de Banach, si $1 < p$.

Los espacios de Lorentz están ordenados:

Teorema 1.21. *Si $r_1 \leq r_2$, entonces $L^{p,r_1}(d\mu) \subset L^{p,r_2}(d\mu)$ y $\|f\|^*_{p,r_2} \leq \|f\|^*_{p,r_1}$.*

De acuerdo con esto, si fijamos p, el menor de los espacios $L^{p,r}(d\mu)$ es $L^{p,1}(d\mu)$. En los casos límite en que los operadores S_n no estén acotados en $L^p(d\mu) = L^{p,p}(d\mu)$, podemos preguntarnos si lo estarán en $L^{p,1}(d\mu)$. El siguiente resultado (caso particular del teorema 3.13, [SW]) afirma que para estudiar esta acotación, basta fijarse en la acción de los operadores sobre las funciones características:

Teorema 1.22. *Sea T un operador lineal definido sobre las funciones características χ_E de conjuntos E de medida finita. Si existe una constante C tal que:*

$$\|T\chi_E\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|\chi_E\|^*_{p,1} = C\|\chi_E\|_{L^p(d\mu)} \tag{1.33}$$

entonces existe otra constante C, que sólo depende de la anterior, tal que

$$\|Tf\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|f\|^*_{p,1} \ \forall f \in L^{p,1}(d\mu).$$

Como es evidente, el recíproco es cierto.

Diremos que un operador que cumple (1.33) es de tipo (p,p)-débil restringido (se puede definir el tipo (p,r)-débil restringido, de manera obvia). Todo operador de tipo (p,p)-débil es de tipo (p,p)-débil restringido. El teorema 1.18 de interpolación de Marcinkiewicz sigue siendo válido con la hipótesis menos exigente del tipo débil restringido. Lo enunciamos sólo para operadores de tipo (p,p):

Teorema 1.23. *Sea T un operador subaditivo de tipo (p_0,p_0)-débil restringido y (p_1,p_1)-débil restringido, con $p_0 < p_1$. Entonces, T es de tipo (p,p)-fuerte para cada $p \in (p_0,p_1)$. Además, existe una constante C que sólo depende de p y de las normas (p_i,p_i)-débiles restringidas de T, tal que*

$$\|Tf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(d\mu)}.$$

En conclusión, la acotación débil restringida uniforme de los operadores S_n sólo es posible en los extremos del intervalo de convergencia en media, aparte del propio intervalo. Esto mismo sucede, como hemos visto antes, con la acotación débil. Algo análogo se puede decir sobre la acotación con pesos de S_n.

Recordemos que la acotación débil restringida equivale a la acotación

$$L^{p,1}(d\mu) \to L^{p,\infty}(d\mu),$$

por el teorema 1.22 y (1.32). Como

$$L^{p,1}(d\mu) \subset L^{p,r}(d\mu) \subset L^{p,\infty}(d\mu)$$

$\forall r \in (1,\infty)$, esto es lo máximo que podemos debilitar la acotación $L^p(d\mu) \to L^p(d\mu)$.

En los siguientes capítulos examinaremos la acotación débil y la débil restringida de algunos sistemas ortonormales.

§3. Teoría de pesos A_p

En este apartado describiremos brevemente algunas propiedades de cierta clase de pesos: los pesos A_p. Estos pesos caracterizan la acotación de dos operadores que aparecerán frecuentemente en esta memoria: la transformada de Hilbert y la maximal de Hardy-Littlewood, que definimos a continuación.

Definición 1.24. La transformada de Hilbert (en $\mathbb{R}$) es el operador H que a cada función medible f asocia la función

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy,$$

donde v.p. significa valor principal. A partir de ahora, no escribiremos v.p. delante de la integral. Podemos definir igualmente la transformada de Hilbert sobre un intervalo contenido en $\mathbb{R}$; emplearemos fundamentalmente la transformada de Hilbert sobre los intervalos $(-1,1)$ y $(0,1)$.

Definición 1.25. Se llama operador maximal de Hardy-Littlewood al operador M que a cada función medible asocia la función

$$Mf(x) = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|\, dy;\ x \in I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ intervalo} \right\}.$$

También podemos definir la maximal de Hardy-Littlewood sobre un intervalo contenido en $\mathbb{R}$, tomando el supremo en los I contenidos en dicho intervalo.

Utilizaremos este operador en el capítulo IV. En cuanto a la transformada de Hilbert, se comprende su importancia en el estudio de la convergencia en media si recordamos la descomposición de Pollard para medidas sobre el intervalo $[-1,1]$, que hemos visto en la primera parte de este capítulo:

$$K_n(x,t) = r_n T_1(n,x,t) + s_n T_2(n,x,t) + s_n T_3(n,x,t)$$

con

$$T_1(n,x,t) = P_{n+1}(x) P_{n+1}(t),$$

$$T_2(n,x,t) = (1-t^2) \frac{P_{n+1}(x) Q_n(t)}{x-t}$$

y

$$T_3(n,x,t) = T_2(n,t,x) = (1-x^2) \frac{P_{n+1}(t) Q_n(x)}{t-x}.$$

Si descomponemos S_n en los tres operadores $W_{i,n}$ dados por

$$W_{i,n} f(x) = \int_{-1}^{1} f(t) T_i(n,x,t)\, d\mu(t),$$

entonces para $i = 2, 3$ resultan sendas transformadas de Hilbert; la acotación de estos operadores se traduce en la acotación de la transformada de Hilbert sobre el intervalo $[-1, 1]$ con pesos distintos; y no sólo con pesos distintos, sino con sucesiones $\{u_n, v_n\}$ de pesos. Es natural entonces preguntarse por los pesos para los cuales se tiene

$$\|Hf\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}.$$

La clase A_p de pesos es precisamente la que proporciona la respuesta más satisfactoria a esta cuestión. Un estudio detallado de esta clase y de sus aplicaciones puede verse en [GR].

Definición 1.26. Sean (a, b) un intervalo $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ y $1 < p < \infty$. Diremos que un peso w pertenece a la clase $A_p((a, b))$ cuando exista una constante positiva C tal que, para todo intervalo $I \subseteq (a, b)$,

$$\left(\int_I w(x)\,dx\right)\left(\int_I w(x)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leq C|I|^p.$$

A la menor constante C que verifica esta desigualdad la llamaremos constante A_p del peso w.

Si hacemos $1/p + 1/q = 1$, entonces $p/q = p - 1$ y la condición anterior puede ponerse de esta manera:

$$\left(\int_I w(x)\,dx\right)\left(\int_I w(x)^{-q/p}\,dx\right)^{p/q} \leq C|I|^p.$$

Es fácil comprobar entonces que $w \in A_p((a, b)) \Leftrightarrow w^{-q/p} \in A_q((a, b))$. Otra consecuencia de la definición es que w y $w^{-q/p}$ deben ser localmente integrables. La clase $A_1((a, b))$ se define como la de los pesos w tales que, para alguna constante C, $Mw \leq Cw$ en casi todo punto. Dos propiedades útiles son:

Teorema 1.27. $A_p((a, b)) = \cup_{r<p} A_r((a, b))$.

Teorema 1.28. *Sea w un peso en un intervalo (a, b). Entonces, $w \in A_p((a, b))$ $\Leftrightarrow \exists w_1, w_2 \in A_1((a, b))$ tales que $w = w_1 w_2^{1-p}$.*

Este último resultado es el llamado teorema de factorización de P. Jones (véase [J], [CJR]).

El resultado fundamental para nuestros propósitos es este, demostrado por Muckenhoupt ([Mu 4]) para la maximal de Hardy-Littlewood y por Hunt, Muckenhoupt y Wheeden ([HMW]) para la transformada de Hilbert:

Teorema 1.29. *Sea T uno de los operadores H o M y $1 < p < \infty$. Son equivalentes:*

a) $w \in A_p((a,b))$.

b) el operador $T : L^p((a,b),w) \longrightarrow L^p((a,b),w)$ *está acotado.*

c) el operador $T : L^p((a,b),w) \longrightarrow L^p_*((a,b),w)$ *está acotado.*

Además, las normas de T *y la constante* A_p *de* w *dependen sólo unas de otras.*

Para la acotación con dos pesos distintos tenemos que definir la clase A_p de pares de pesos:

Definición 1.30. Sean (a,b) un intervalo $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ y $1 < p < \infty$. Diremos que un par de pesos (u,v) pertenece a la clase $A_p((a,b))$ cuando exista una constante positiva C tal que, para todo intervalo $I \subseteq (a,b)$,

$$\left(\int_I u(x)\,dx\right)\left(\int_I v(x)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leq C|I|^p.$$

A la menor constante C que verifica esta desigualdad la llamaremos constante A_p del par (u,v).

La condición anterior puede ponerse de esta manera:

$$\left(\int_I u(x)\,dx\right)\left(\int_I v(x)^{-q/p}\,dx\right)^{p/q} \leq C|I|^p.$$

Igual que para un solo peso, $(u,v) \in A_p((a,b)) \Leftrightarrow (v^{-q/p}, u^{-q/p}) \in A_q((a,b))$. Asimismo, u y $v^{-q/p}$ deben ser localmente integrables. La clase $A_1((a,b))$ se define como la de los pares (u,v) tales que, para alguna constante C, $Mu \leq Cv$ en casi todo punto. Se cumple la relación de contenido: si $1 < p < r < \infty$, $A_1 \subset A_p \subset A_r$.

Con pares de pesos A_p podemos establecer un teorema del tipo del 1.29, pero considerablemente más débil, al menos para la transformada de Hilbert:

Teorema 1.31. *Sea* (a,b) *un intervalo,* $1 < p < \infty$ *y* u *y* v *dos pesos sobre* (a,b). *Entonces:*

a) $(u,v) \in A_p \Leftrightarrow M : L^p((a,b),v) \longrightarrow L^p_*((a,b),u)$ *acotado.*

b) $(u,v) \in A_p \Rightarrow M : L^r((a,b),v) \longrightarrow L^r((a,b),u)$ *acotado* $\forall r > p$.

c) $H : L^p((a,b),v) \longrightarrow L^p_*((a,b),u)$ *acotado* $\Rightarrow (u,v) \in A_p$.

Es de destacar que la condición $(u,v) \in A_p$ no implica la acotación de la transformada de Hilbert. Para obtener condiciones suficientes para esta acotación, debemos definir la siguiente clase de pesos:

Definición 1.32. Sean (a, b) un intervalo, $1 < p < \infty$ y $\delta > 1$. Sean u y v dos pesos sobre (a, b). Diremos que $(u, v) \in A_p^\delta$ si $(u^\delta, v^\delta) \in A_p$.

Según demostró Neugebauer ([N]), entre dos pesos u y v tales que $(u, v) \in A_p^\delta$ existe un peso $w \in A_p$:

Teorema 1.33. *Sean (a, b) un intervalo, $1 < p < \infty$ y $\delta > 1$. Si $(u, v) \in A_p^\delta$, entonces existen un peso $w \in A_p$ y dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que $c_1 u \leq w \leq c_2 v$ en casi todo punto.*

Con ayuda de este resultado y del teorema 1.29, se tiene:

Teorema 1.34. *Sean (a, b) un intervalo, $1 < p < \infty$ y u y v dos pesos sobre (a, b). Si existe $\delta > 1$ tal que $(u, v) \in A_p^\delta$, entonces el operador*

$$H : L^p((a, b), v) \longrightarrow L^p((a, b), u)$$

está acotado. Además, la norma de H depende sólo de la constante A_p^δ del par (u, v).

Puesto que vamos a necesitar acotaciones de la transformada de Hilbert con sucesiones de pares de pesos (u_n, v_n), con constantes que no dependan de n, surge de manera natural la siguiente definición:

Definición 1.35. Diremos que una familia $\{(u_n, v_n)\}_{n \geq 0}$ pertenece a $A_p((a, b))$ uniformemente si existe una constante C tal que $\forall n \geq 0$ y para todo intervalo I contenido en (a, b),

$$\left(\int_I u_n(x)\, dx \right) \left(\int_I v_n(x)^{-q/p}\, dx \right)^{p/q} \leq C|I|^p.$$

Una definición análoga se tiene para $A_p^\delta((a, b))$ uniforme.

Las condiciones A_p y A_p^δ uniformes han sido estudiadas con detalle por Varona para pesos de los denominados radiales, es decir, productos de expresiones del tipo $|x-t|^r$ y $(|x-t|+x_n)^r$, con $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Las principales propiedades que vamos a utilizar son las siguientes (véase [V], capítulo 2, pág. 40 y sig.):

Teorema 1.36. $x^r \in A_p((0, 1)) \Leftrightarrow -1 < r < p - 1$.

Es decir, estos pesos u están en la clase A_p si y sólo si u y $u^{-q/p}$ son integrables.

Teorema 1.37. *Son equivalentes:*

a) $(x^r, x^R) \in A_p((0, 1))$.

b) $\exists \delta > 1$ *tal que* $(x^r, x^R) \in A_p^\delta((0, 1))$.

c) Se cumplen las desigualdades: $-1 < r$; $R < p - 1$; $R \leq r$.

Teorema 1.38. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión,* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*,* $x_n > 0\ \forall n$*. Entonces, son equivalentes:*

a) $\{(x^r(x+x_n)^s, x^R(x+x_n)^S)\} \in A_p((0,1))$ *uniformemente.*

b) $\exists \delta > 1$ *tal que* $\{(x^r(x+x_n)^s, x^R(x+x_n)^S)\} \in A_p^\delta((0,1))$ *unif.*

c) Se verifican las desigualdades:

$$-1 < r; \qquad R < p-1; \qquad R \leq r;$$

$$-1 < r+s; \qquad R+S < p-1; \qquad R+S \leq r+s.$$

Las mismas caracterizaciones se tienen sustituyendo $(0,1)$ por (a,b) y x por $|x-t|$, siempre que $t \in [a,b]$. Pero además, la pertenencia a una de estas clases A_p de pesos en los que intervienen factores del tipo $|x-t|$ se comprueba viendo si en cada punto t se cumplen las condiciones anteriores. Esto es lo que afirma el siguiente resultado ([V], corolario 2.19, pág. 57):

Teorema 1.39. *Sea* (a,b) *un intervalo acotado. Sea:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} = b;$$

$$\{x_{k,n}\}_{n\geq 0}, \ \textit{con} \ \lim_{n\to\infty} x_{k,n} = 0 \ (k = 0, \ldots, m+1) \ \textit{y} \ x_{k,n} > 0 \ \forall k, n;$$

$$u_{k,n}(x) = |x-x_k|^{a_k}(|x-x_k| + x_{k,n})^{b_k} \ (k = 0, \ldots, m+1);$$

$$v_{k,n}(x) = |x-x_k|^{A_k}(|x-x_k| + x_{k,n})^{B_k} \ (k = 0, \ldots, m+1).$$

Sean

$$u_n(x) = u_{0,n}(x)u_{1,n}(x)\ldots u_{m+1,n}(x),$$

$$v_n(x) = v_{0,n}(x)v_{1,n}(x)\ldots v_{m+1,n}(x).$$

Entonces, son equivalentes:

a) $(u_n, v_n) \in A_p((a,b))$ *uniformemente.*

b) $(u_{k,n}, v_{k,n}) \in A_p((a,b))$ *uniformemente,* $k = 0, \ldots, m+1$.

Lo mismo se cumple con la clase $A_p^\delta((a,b))$.

Como hemos dicho, la teoría de pesos A_p puede aplicarse al estudio de la convergencia de la serie de Fourier: sea $d\mu(x) = w(x)\,dx$ sobre $[-1,1]$, con $w > 0$ en casi todo punto. Sean $\{P_n\}$ los polinomios ortonormales de $d\mu$ y $\{Q_n\}$ los de $(1-x^2)\,d\mu(x)$. Por la descomposición de Pollard de los núcleos $K_n(x,y)$, basta demostrar la acotación uniforme de los operadores:

$$W_{1,n}f(x) = P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)f(t)w(t)\,dt$$

$$W_{2,n}f(x) = P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)Q_n(t)f(t)w(t)}{x-t}\,dt$$

$$W_{3,n}f(x) = (1-x^2)Q_n(x)\int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(t)f(t)w(t)}{x-t}\,dt.$$

Concretamente, si u y v son dos pesos, para probar que

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p w\,dx)} \le C\|f\|_{L^p(v^p w\,dx)}$$

es suficiente obtener:

$$\|W_{i,n} f\|_{L^p(u^p w\,dx)} \le C\|f\|_{L^p(v^p w\,dx)}.$$

La acotación de $W_{1,n}$ se puede lograr mediante la desigualdad de Hölder. Los otros dos operadores se expresan mediante la transformada de Hilbert. De esta manera, Varona ([V], capítulo III) demostró que las S_n están uniformemente acotadas si:

$$\left(\int_{-1}^{1} u_n(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_{-1}^{1} \overline{v}_n(x)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{1/q} \le C,$$

$$(u_n, v_n) \in A_p^\delta$$

uniformemente para algún $\delta > 1$,

$$(\overline{u}_n, \overline{v}_n) \in A_p^\delta$$

uniformemente para algún $\delta > 1$, donde

$$u_n(x) = |P_{n+1}(x)|^p u(x)^p w(x),$$

$$v_n(x) = |Q_n(x)|^{-p}(1-x^2)^{-p} v(x)^p w(x)^{1-p},$$

$$\overline{u}_n(x) = |Q_n(x)|^p (1-x^2)^p u(x)^p w(x),$$

$$\overline{v}_n(x) = |P_{n+1}(x)|^{-p} v(x)^p w(x)^{1-p}.$$

Tomemos ahora un peso de Jacobi generalizado. Para los polinomios correspondientes, hemos visto acotaciones en la primera parte de este capítulo. Basándose en ellas y en los teoremas anteriores sobre pesos A_p^δ, Varona estudió esas tres condiciones y demostró el teorema 1.14 en el caso $\gamma_i \geq 0 \ \forall i$. Esta restricción puede eliminarse por el procedimiento que ahora describimos sucintamente (véase [GPRV] para mayor detalle):

Sea w el peso de Jacobi generalizado. Sean $\{K_n(x,y)\}$ sus núcleos y $\{S_n\}$ las sumas parciales de su serie de Fourier. Sean $\{K_n^c(x,y)\}$ y $\{S_n^c\}$ los relativos al peso $(x-c)^2 w(x)$, con $c \in [-1,1]$. Puede probarse la siguiente relación:

$$K_n(x,y) = (x-c)(y-c)K_{n-1}^c(x,y) + \frac{K_n(x,c)}{K_n(c,c)}K_n(c,y).$$

De esta igualdad se deduce: $S_n f = T_{1,n} f + T_{2,n} f$, donde:

$$T_{1,n}f(x) = \frac{K_n(x,c)}{K_n(c,c)} \int_{-1}^{1} K_n(c,y) f(y) w(y)\, dy$$

y

$$T_{2,n}f(x) = (x-c)S_{n-1}^c\Big(\frac{f(y)}{y-c}, x\Big).$$

El operador $T_{1,n}$ se puede acotar, conociendo expresiones adecuadas para los núcleos. Queda sólo acotar el operador $T_{2,n}$. Esto se reduce a la acotación con otros pesos de S_n^c. De este modo, pasamos de un peso de Jacobi generalizado con un exponente negativo $\gamma > -1$ en el punto c a otro con un exponente positivo $\gamma+2$. Por reiteración de este proceso, "quitamos" todos los exponentes negativos y aplicamos el resultado de Varona.

CAPÍTULO II

Acotación débil de las series de Fourier

§1. Comportamiento débil de las series de Fourier-Jacobi

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios, ortonormales con respecto a una medida $d\mu$ positiva, de Borel y finita sobre $\mathbb{R}$. Con S_nf denotamos la suma parcial enésima del desarrollo de Fourier de f en $\{P_n\}$. Sean u y v dos pesos. Hemos visto en el capítulo anterior que, por teoría de interpolación, el conjunto de los p para los cuales se verifica la acotación uniforme

$$\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)}$$

es un intervalo: el intervalo de convergencia en media. Además, únicamente puede haber acotación débil o débil restringida en los extremos de dicho intervalo (además del propio intervalo), lo que también se deduce de la teoría de interpolación. Al estudio de esas acotaciones dedicamos este capítulo.

Ya hemos visto en el capítulo primero que, en el caso de los polinomios de Jacobi, es decir, si $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ $(\alpha,\beta > -1)$ sobre el intervalo $[-1,1]$, con $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ y $v(x) = (1-x)^A(1+x)^B$, el intervalo de convergencia en media viene dado por las condiciones siguientes (es un caso particular del teorema 1.14):

$$A + (\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad A + (\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\alpha+1}{2},$$

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad a + (\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\alpha+1}{2}$$

y sus análogas con β, b y B.

Estas desigualdades determinan un intervalo abierto de p, para cuyos extremos no existe acotación en media. Cabe preguntarse entonces si en dichos extremos se verifica al menos la acotación débil. Esta cuestión fue resuelta por Chanillo ([Ch]) para el caso $\alpha = \beta = 0$ (polinomios de Legendre) con $u = v = 1$ y generalizada en [GPV]; su estudio es el objetivo de este capítulo. Para ello, consideramos primeramente el caso general y hallamos condiciones necesarias para la acotación débil, que implican las obtenidas por Máté, Nevai y Totik para la acotación en media (véase [MNT 1], [GPV]).

Lema 2.1. *Sean $d\mu$ una medida sobre $\mathbb{R}$, u_1, u_2 y v tres pesos y $1 < p < \infty$. Si existe una constante C tal que $\forall f \in L^p(v^p\,d\mu)$ se verifica la desigualdad*

$$\|u_1S_nf\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)}\ \forall n \geq 0, \tag{2.1}$$

entonces

$$\|P_n\|_{L^q(v^{-q}\,d\mu)}\|u_1P_n\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C \;\forall n \ge 0, \tag{2.2}$$

donde $1/q + 1/p = 1$.

Demostración:
Si $a_n(f) = \int_{\mathbb{R}} fP_n\,d\mu$ es el enésimo coeficiente de Fourier de f, de (2.1) se sigue que

$$\|a_n(f)u_1P_n\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} = \|u_1(S_nf - S_{n-1}f)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)},$$

es decir:

$$|a_n(f)| \le C\left(\|u_1P_n\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)}\right)^{-1}\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}.$$

Entonces, cada uno de los operadores:

$$\begin{aligned} P_nv^{-p} : L^p(v^p\,d\mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} (P_nv^{-p})fv^p\,d\mu = a_n(f) \end{aligned}$$

está acotado y, por dualidad, su norma como operador coincide con su norma en $L^q(v^p\,d\mu)$. Luego:

$$\|P_nv^{-p}\|_{L^q(v^p\,d\mu)} \le C\left(\|u_1P_n\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)}\right)^{-1} \;\forall n \ge 0.$$

Pero:

$$\|P_nv^{-p}\|_{L^q(v^p\,d\mu)} = \|P_nv^{-p+p/q}\|_{L^q(d\mu)} = \|P_nv^{-1}\|_{L^q(d\mu)}.$$

Por lo tanto, se verifica (2.2).

Recordemos el teorema 1.11, de Máté, Nevai y Totik:

Sea $d\mu$ una medida sobre $[-1,1]$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto. Sea $0 < p \le \infty$. Existe una constante C tal que, si g es una función medible Lebesgue en $[-1,1]$, entonces:

$$\|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}g(x)\|_{L^p(dx)} \le C \varliminf_{n\to\infty} \|P_ng\|_{L^p(dx)}.$$

En particular, si $\varliminf_{n\to\infty}\|P_ng\|_{L^p(dx)} = 0$, entonces $g = 0$ en casi todo punto.

Para el caso débil, puede obtenerse a partir de este resultado algo similar, ya que la norma débil se relaciona con la fuerte mediante la condición de Kolmogorov ([GR], lema V.2.8, pág. 485):

Lema 2.2. *Sean dm una medida σ-finita, $0 < r < p < \infty$, $1/s = 1/r - 1/p$ y f una función medible. Entonces:*

$$\|f\|_{L^p_*(dm)} \leq \sup_E \frac{\|f\chi_E\|_{L^r(dm)}}{\|\chi_E\|_{L^s(dm)}} \leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{1/r} \|f\|_{L^p_*(dm)},$$

donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos medibles E tales que $0 < m(E) < \infty$ y χ_E es la función característica de E.

Lema 2.3. *Sea $d\mu$ una medida sobre $[-1,1]$ y $\mu' > 0$ en $[-1,1]$ en casi todo punto. Sea $0 < p < \infty$. Existe una constante C tal que, si g y h son funciones medibles Lebesgue en $[-1,1]$, entonces:*

$$\|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}g(x)\|_{L^p_*(|h(x)|\,dx)} \leq C \varliminf_{n\to\infty} \|P_n g\|_{L^p_*(|h(x)|\,dx)}.$$

Demostración:
Sea E un conjunto medible, con $0 < \int_E |h(x)|dx < \infty$. Según el teorema 1.14 y el lema 2.2:

$$\frac{\|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}g\chi_E\|_{L^r(|h(x)|\,dx)}}{\|\chi_E\|_{L^s(|h(x)|\,dx)}} \leq C \varliminf_{n\to\infty} \frac{\|P_n g\chi_E\|_{L^r(|h(x)|\,dx)}}{\|\chi_E\|_{L^s(|h(x)|\,dx)}} \leq$$
$$\leq C \varliminf_{n\to\infty} \|P_n g\|_{L^p_*(|h(x)|\,dx)}.$$

Basta ahora tomar el supremo en E y aplicar de nuevo el lema 2.2.

El siguiente teorema proporciona condiciones necesarias para la acotación débil, con pesos, de la serie de Fourier:

Teorema 2.4. *Sea $d\mu$ una medida sobre $[-1,1]$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto de $[-1,1]$. Sean u_1, u_2 y v tres pesos tales que u_1u_2 es distinto de cero y v es finito en sendos conjuntos de medida μ positiva. Sea $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Si existe una constante C tal que $\forall f \in L^p(v^p\,d\mu)$ se verifica la desigualdad*

$$\|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)} \;\forall n \geq 0,$$

entonces:

$$u_1 \in L^p_*(u_2^p)\,d\mu); \tag{2.3}$$

$$v^{-1} \in L^q(d\mu); \tag{2.4}$$

$$\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}u_1(x) \in L^p_*(u_2^p)\mu'); \tag{2.5}$$

$$\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}v(x)^{-1} \in L^q(\mu'). \tag{2.6}$$

Demostración:
Haciendo $n=0$ en la desigualdad (2.2) del lema 2.1, se obtiene (2.3) y (2.4), puesto que P_0 es una constante no nula. Asimismo, de (2.2) se deduce que

$$\|P_n\|_{L^q(v^{-q}\mu')}\|u_1 P_n\|_{L^p_*(u_2^p\mu')} \leq C \ \forall n \geq 0.$$

Tomando ahora límites inferiores resulta, de acuerdo con el teorema 1.11 y el lema 2.3:

$$\begin{aligned} \|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\|_{L^q(v^{-q}\mu')}\|u_1\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\|_{L^p_*(u_2^p\mu')} &\leq \\ \leq \varliminf_{n\to\infty} \|P_n\|_{L^q(v^{-q}\mu')} \varliminf_{n\to\infty} \|u_1 P_n\|_{L^p_*(u_2^p\mu')} &\leq \\ \leq \varliminf_{n\to\infty} \|P_n\|_{L^q(v^{-q}\mu')}\|u_1 P_n\|_{L^p_*(u_2^p\mu')} &\leq C. \end{aligned}$$

Puesto que ninguna de las normas se anula (ello implicaría $u_1u_2=0$, o bien $v=\infty$ en casi todo punto), cada una de ellas debe ser finita y se llega a (2.5) y (2.6).

Corolario 2.5. *Con las hipótesis del teorema 2.4, si u y v son dos pesos que en sendos conjuntos de medida μ positiva son finitos y distintos de cero y se cumple*

$$\|uS_nf\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)} \ \forall n \geq 0, \ \forall f \in L^p(v^p\, d\mu)$$

y

$$\|v^{-1}S_nf\|_{L^q_*(d\mu)} \leq C\|u^{-1}f\|_{L^q(d\mu)} \ \forall n \geq 0, \ \forall f \in L^q(u^{-q}\, d\mu),$$

entonces:

$$\begin{gathered} u \in L^p(d\mu), \\ v^{-1} \in L^q(d\mu), \\ \mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}u(x) \in L^p(\mu'), \\ \mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}v(x)^{-1} \in L^q(\mu'). \end{gathered}$$

Observación 2.6: estas son las condiciones necesarias a las que llegan Máté, Nevai y Totik (teorema 1.12) para la acotación

$$\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)}.$$

Pero esta implica también $\|v^{-1}S_nf\|_{L^q(d\mu)} \leq C\|u^{-1}f\|_{L^q(d\mu)}$. El corolario 2.5 significa que basta con la acotación débil para llegar a esas condiciones.

A continuación estudiaremos el caso de las series de Jacobi. Sean ahora $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ sobre $[-1,1]$, $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$. El intervalo de convergencia en media ($\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|uf\|_{L^p(d\mu)}$ $\forall n$, $\forall f$), para $1 < p < \infty$, viene caracterizado por la condiciones:

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) < \frac{\alpha+1}{2},$$

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) > -\frac{\alpha+1}{2}$$

y las correspondientes con b y β.

Los siguientes resultados técnicos serán de utilidad más adelante:

Lema 2.7. *Sean* $0 < p < \infty$, $r, s \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Entonces:*

$$\chi_{(0,a)}(x)x^r \in L^p_*(x^s\,dx) \Leftrightarrow pr + s + 1 \geq 0,\ (r,s) \neq (0,-1).$$

Y, en este caso,

$$\|\chi_{(0,a)}(x)x^r\|_{L^p_*(x^s\,dx)} = K(r,s,p)a^{r+(s+1)/p}. \tag{2.7}$$

Demostración:
Vamos a hallar el valor de

$$\|\chi_{(0,a)}(x)x^r\|^p_{L^p_*(x^s\,dx)} = \sup_{y>0} y^p \int_{\substack{0<x<a\\ x^r>y}} x^s\,dx = \sup_{y>0} I(y),$$

con $I(y) = y^p \int_{\substack{0<x<a\\ x^r>y}} x^s\,dx$. Podemos distinguir los siguientes casos:

a) $pr + s + 1 < 0$; a su vez: a1) $r > 0$, $s < -1$; a2) $r = 0$, $s < -1$; a3) $r < 0$.

b) $pr + s + 1 = 0$; a su vez: b1) $r > 0$, $s < -1$; b2) $r = 0$, $s = -1$; b3) $r < 0$, $s > -1$.

c) $pr + s + 1 > 0$; a su vez: c1) $r > 0$; c2) $r = 0$, $s > -1$; c3) $r < 0$, $s > -1$.

Tenemos que probar que $\sup_{y>0} I(y) = +\infty$ en a) y b2), $\sup_{y>0} I(y) = C(r,s,p)$ en b1) y b3) y $\sup_{y>0} I(y) = C(r,s,p)a^{pr+s+1}$ en c).
Veamos cada uno de ellos:
a1) $pr + s + 1 < 0$, $r > 0$, $s < -1$. $I(y) = y^p \int_{\substack{0<x<a\\ x^r>y}} x^s\,dx = y^p \int_{\substack{0<x<a\\ y^{1/r}<x}} x^s\,dx.$

Tomemos $y < a^r$; entonces,

$$I(y) = y^p \int_{y^{1/r}}^a x^s\,dx = Cy^p[y^{(s+1)/r} - a^{s+1}] = C[y^{(pr+s+1)/r} - a^{s+1}y^p].$$

Puesto que $pr+s+1<0$ y $r>0$, $\lim_{y\to 0^+} I(y)=+\infty$; es decir: $\sup_{y>0} I(y)=+\infty$, como queríamos demostrar.
a2) $pr+s+1<0$, $r=0$, $s<-1$. $I(y)=y^p\displaystyle\int_{\substack{0<x<a\\ 1>y}} x^s\,dx$, que diverge siempre que $y<1$. Luego $\sup_{y>0} I(y)=+\infty$.
a3) $pr+s+1<0$, $r<0$. $I(y)=y^p\displaystyle\int_{\substack{0<x<a\\ x^r>y}} x^s\,dx=y^p\int_{\substack{0<x<a\\ x<y^{1/r}}} x^s\,dx$. Si $s\le -1$, esta integral diverge y ya está.
Supongamos que $s>-1$. Tomemos $y>a^r$; entonces $y^{1/r}<a$, luego

$$I(y)=y^p\int_{0<x<y^{1/r}} x^s\,dx=Cy^{p+(s+1)/r}=Cy^{(pr+s+1)/r}.$$

Y como $pr+s+1<0$ y $r<0$, $\lim_{y\to+\infty} I(y)=+\infty$, así que $\sup_{y>0} I(y)=+\infty$.
b1) $pr+s+1=0$, $r>0$, $s<-1$.

$$I(y)=y^p\int_{\substack{0<x<a\\ x^r>y}} x^s\,dx=y^p\int_{\substack{0<x<a\\ y^{1/r}<x}} x^s\,dx=\begin{cases} y^p\int_{y^{1/r}}^a x^s\,dx & \text{si } y^{1/r}\le a\\ 0 & \text{si } a\le y^{1/r}\end{cases}$$

luego, teniendo en cuenta que $s+1<0$ y que $pr+s+1=0$,

$$\begin{aligned}\sup_{y>0} I(y)&=\sup_{0<y<a^r} y^p\int_{y^{1/r}}^a x^s\,dx=\sup_{0<y<a^r} Cy^p[y^{(s+1)/r}-a^{s+1}]=\\ &=\sup_{0<y<a^r} C[y^{(pr+s+1)/r}-a^{s+1}y^p]=\sup_{0<y<a^r} C[1-(y/a^r)^p]=C,\end{aligned}$$

donde $C=-1/(s+1)$.
b2) $pr+s+1=0$, $r=0$, $s=-1$. $I(y)=y^p\displaystyle\int_{\substack{0<x<a\\ 1>y}} x^{-1}\,dx$, que diverge siempre que $y<1$. Luego $\sup_{y>0} I(y)=+\infty$.
b3) $pr+s+1=0$, $r<0$, $s>-1$. $I(y)=y^p\displaystyle\int_{\substack{0<x<a\\ x^r>y}} x^s\,dx=y^p\int_{\substack{0<x<a\\ x<y^{1/r}}} x^s\,dx=$

$$\begin{aligned}&=\begin{cases} y^p\int_0^a x^s\,dx & \text{si } y\le a^r\\ y^p\int_{0<x<y^{1/r}} x^s\,dx & \text{si } a^r\le y\end{cases}=\begin{cases} Cy^pa^{s+1} & \text{si } y\le a^r\\ Cy^{p+(s+1)/r} & \text{si } a^r\le y\end{cases}=\\ &=\begin{cases} C(y/a^r)^p & \text{si } y\le a^r\\ C & \text{si } a^r\le y\end{cases}\end{aligned}$$

luego $\sup_{y>0} I(y)=C$, donde C depende de s.

c1) $pr+s+1>0$, $r>0$. Supongamos $s \neq -1$ (para $s=-1$ se procede de manera análoga); comenzando como en b1),

$$\begin{aligned}\sup_{y>0} I(y) &= \sup_{0<y<a^r} y^p \int_{y^{1/r}}^{a} x^s\,dx = \sup_{0<y<a^r} Cy^p|a^{s+1}-y^{(s+1)/r}| = \\ &= \sup_{0<y<a^r} Ca^{pr}(y/a^r)^p \left|a^{s+1}\left[1-(y/a^r)^{(s+1)/r}\right]\right| = \\ &= \sup_{0<y<a^r} Ca^{pr+s+1}(y/a^r)^p \left|1-(y/a^r)^{(s+1)/r}\right| = \\ &= Ca^{pr+s+1} \sup_{0<t<1} t^p \left|1-t^{(s+1)/r}\right| = \\ &= Ca^{pr+s+1} \sup_{0<t<1} \left|t^p - t^{(pr+s+1)/r}\right| = Ca^{pr+s+1}\end{aligned}$$

(donde C depende de p, r y s), ya que

$$\lim_{t\to 0^+} \left|t^p - t^{(pr+s+1)/r}\right| = \lim_{t\to 1^-} \left|t^p - t^{(pr+s+1)/r}\right| = 0,$$

por ser $pr+s+1>0$ y $r>0$.
c2) $pr+s+1>0$, $r=0$, $s>-1$.

$$\sup_{y>0} I(y) = \sup_{y>0} y^p \int_{\substack{0<x<a \\ 1>y}} x^s\,dx = \int_0^a x^s\,dx = Ca^{s+1} = Ca^{pr+s+1},$$

donde C depende de p, r y s.
c3) $pr+s+1>0$, $r<0$, $s>-1$. De la misma manera que en b3),

$$I(y) = \begin{cases} Cy^p a^{s+1} & \text{si } y \leq a^r, \\ Cy^{p+(s+1)/r} & \text{si } a^r \leq y, \end{cases}$$

donde C depende de p, r y s. Luego:

$$\sup_{0<y\leq a^r} I(y) = Ca^{pr+s+1},$$
$$\sup_{a^r\leq y} I(y) = \sup_{a^r \leq y} Cy^{(pr+s+1)/r} = Ca^{pr+s+1},$$

ya que $pr+s+1>0$ y $r<0$. Por lo tanto, $\sup_{y>0} I(y) = Ca^{pr+s+1}$, donde C depende de p, r y s. Con esto, queda demostrado el lema.

Lema 2.8. *Sea H la transformada de Hilbert, es decir:*

$$Hg(x) = v.p. \int \frac{g(t)}{x-t}\,dt,$$

donde la integral se toma sobre $\mathbb{R}$ o sobre otro intervalo. Sean $d\mu$ y $d\eta$ dos medidas, u un peso y $1 \le p \le \infty$; supongamos que existe una constante C tal que

$$\|uHg\|_{L^p_*(d\mu)} \le C\|g\|_{L^p(d\eta)} \;\forall g \in L^p(d\eta).$$

Entonces, $\forall f \in L^p(d\eta)$, $\forall r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r \le s$, se verifican las desigualdades siguientes, donde la constante C es la misma de antes:

$$\left(\int_{\{t\ge s\}} \frac{|f(t)|\,dt}{t-r}\right) \|u\chi_{(r,s)}\|_{L^p_*(d\mu)} \le C\|f\chi_{\{t\ge s\}}\|_{L^p(d\eta)}$$

$$\left(\int_{\{t\le r\}} \frac{|f(t)|\,dt}{s-t}\right) \|u\chi_{(r,s)}\|_{L^p_*(d\mu)} \le C\|f\chi_{\{t\le r\}}\|_{L^p(d\eta)}$$

Y si H satisface la acotación fuerte, ambas se cumplen también con normas fuertes.

Demostración:
Sea $r \le x \le s \le t$; entonces, $0 \le t-x \le t-r \Rightarrow \frac{1}{t-r} \le \frac{1}{t-x}$. Sea $g(x) = \chi_{\{x\ge s\}}|f(x)|$;

$$r \le x \le s \Rightarrow |Hg(x)| = \left|\int_{\{t\ge s\}} \frac{|f(t)|\,dt}{x-t}\right| \ge \int_{\{t\ge s\}} \frac{|f(t)|\,dt}{t-r},$$

luego

$$|Hg(x)| \ge \left(\int_{\{t\ge s\}} \frac{|f(t)|\,dt}{t-r}\right) \chi_{(r,s)}(x) \;\forall x$$

y

$$\left(\int_{\{t\ge s\}} \frac{|f(t)|\,dt}{t-r}\right) \|u\chi_{(r,s)}\|_{L^p_*(d\mu)} \le \|uHg\|_{L^p_*(d\mu)} \le C\|g\|_{L^p(d\eta)} =$$

$$= C\|f\chi_{\{t\ge s\}}\|_{L^p(d\eta)}.$$

La otra desigualdad se obtiene de manera análoga.

Con todos los resultados anteriores podemos estudiar ya la convergencia débil de la serie de Fourier respecto de una medida de Jacobi:

Teorema 2.9. *Sean $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en el intervalo $[-1,1]$ ($\alpha, \beta > -1$), $d\mu(x) = w(x)\,dx$, S_nf la suma parcial enésima del desarrollo de Fourier de polinomios de Jacobi, ortonormales con respecto a $d\mu$. Sean $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ y $1 < p < \infty$.*
Si existe una constante C tal que $\forall f \in L^p(u^p\,d\mu)$ se verifica la desigualdad

$$\|S_nf\|_{L^p_*(u^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(u^p\,d\mu)} \;\forall n \ge 0,$$

entonces deben cumplirse las condiciones:

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}; \tag{2.8}$$

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{\alpha+1}{2}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{\beta+1}{2}; \tag{2.9}$$

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{1}{4}; \tag{2.10}$$

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{\alpha+1}{2}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{\beta+1}{2}. \tag{2.11}$$

Demostración:
Según el teorema 2.4, con $u_1=1$ y $u_2=v=u$, se tienen que satisfacer las siguientes condiciones:

$$1\in L^p_*(u^pw);$$

$$u^{-1}\in L^q(w);$$

$$w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\in L^p_*(u^pw); \tag{2.12}$$

$$w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}u^{-1}(x)\in L^q(w). \tag{2.13}$$

Examinamos cada una de estas condiciones de integrabilidad únicamente en $x=1$, ya que en $x=-1$ son análogas. Así, y teniendo en cuenta que $1\in L^p_*(u^pw)\Leftrightarrow 1\in L^p(u^pw)$, la primera de ellas implica:

$$ap+\alpha>-1\Leftrightarrow a+(\alpha+1)\frac{1}{p}>0\Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{\alpha+1}{2}\Leftrightarrow (2.11).$$

La segunda:

$$-aq+\alpha>-1\Leftrightarrow aq-(\alpha+1)<0\Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-1)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{\alpha+1}{2}\Leftrightarrow (2.9).$$

La cuarta:

$$-\frac{\alpha}{2}q-\frac{1}{4}q-aq+\alpha>-1\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-a+(\alpha+1)(1-\frac{1}{p})>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-1)<-\frac{2\alpha+1}{4}\Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}\Leftrightarrow (2.8).$$

Por último, de (2.12) se obtiene, según el lema 2.7:

$$-\frac{\alpha}{2}p-\frac{1}{4}p+ap+\alpha\geq -1\Leftrightarrow a+(\alpha+1)\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\geq 0,$$

ya que, como usaremos repetidamente,

$$w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\in L^p_*(u^pw)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\in L^p_*((-1,0),u^pw) \\ w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\in L^p_*((0,1),u^pw)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)^{-\beta/2}(1+x)^{-1/4}\in L^p_*((-1,0),(1+x)^{bp}(1+x)^{\beta}) \\ (1-x)^{-\alpha/2}(1-x)^{-1/4}\in L^p_*((0,1),(1-x)^{ap}(1-x)^{\alpha})\end{cases}$$

Es decir (con su análoga para b y β):

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\geq -\frac{1}{4};\qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\geq -\frac{1}{4}. \tag{2.14}$$

Lo único que falta por demostrar es que, sabiendo que (2.8), (2.9), (2.11) y (2.12) son ciertas (y también (2.13), por lo tanto) y que existe acotación débil uniforme de $\{S_n\}$, no pueden darse las igualdades en (2.14).

Consideremos la descomposición de Pollard del núcleo, que hemos visto en el primer capítulo:

$$K_n(x,t)=r_nT_1(n,x,t)+s_nT_2(n,x,t)+s_nT_3(n,x,t)$$

con

$$T_1(n,x,t)=P_{n+1}(x)P_{n+1}(t),$$

$$T_2(n,x,t)=(1-t^2)\frac{P_{n+1}(x)Q_n(t)}{x-t}$$

y

$$T_3(n,x,t)=T_2(n,t,x)=(1-x^2)\frac{P_{n+1}(t)Q_n(x)}{t-x},$$

donde $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ son los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$ y a $(1-x^2)\,d\mu$. Además, $\lim_{n\to\infty} r_n=-1/2$ y $\lim_{n\to\infty} s_n=1/2$ ya que $\operatorname{sop}\mu=[-1,1]$ y $\mu'>0$ en casi todo punto.

Podemos entonces poner

$$S_n(f,x)=\int_{-1}^{1} f(t)K_n(x,t)\,d\mu(t)=r_nW_{1,n}(f,x)+s_nW_{2,n}(f,x)+s_nW_{3,n}(f,x),$$

con $W_{i,n}(f,x) = \int_{-1}^{1} f(t)T_i(n,x,t)w(t)\,dt$ $(i = 1,2,3)$.
Vamos a demostrar que, con las hipótesis (2.8), (2.9), (2.11) y (2.12), $W_{1,n}$ y $W_{3,n}$ son operadores uniforme débilmente acotados (en n); pero que $W_{2,n}$ no lo es si en (2.14) se da alguna igualdad. Con esto, quedará probado el teorema.
a) Acotación uniforme de los operadores $W_{1,n}$: por la desigualdad de Hölder,

$$|W_{1,n}(f,x)| = |P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)f(t)w(t)\,dt| = |P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} P_{n+1}u^{-1}fuw| \leq$$

$$\leq |P_{n+1}(x)|\|P_{n+1}u^{-1}\|_{L^q(w)}\|fu\|_{L^p(w)},$$

luego

$$\|W_{1,n}f\|_{L^p_*(u^p w)} \leq \|P_{n+1}\|_{L^p_*(u^p w)}\|P_{n+1}u^{-1}\|_{L^q(w)}\|fu\|_{L^p(w)}$$

y basta con:

$$\|P_n\|_{L^p_*(u^p w)} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|P_n u^{-1}\|_{L^q(w)} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, en el primer capítulo hemos visto que los polinomios P_n admiten la cota siguiente:

$$|P_n(x)| \leq C(1 - x + \frac{1}{n^2})^{-(2\alpha+1)/4}(1 + x + \frac{1}{n^2})^{-(2\beta+1)/4}. \tag{2.15}$$

Entonces, es suficiente con obtener:

$$\|(1 - x + \frac{1}{n^2})^{-(2\alpha+1)/4}(1 + x + \frac{1}{n^2})^{-(2\beta+1)/4}\|_{L^p_*(u^p w)} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|(1 - x + \frac{1}{n^2})^{-(2\alpha+1)/4}(1 + x + \frac{1}{n^2})^{-(2\beta+1)/4}u^{-1}\|_{L^q(w)} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

O, lo que es equivalente, las siguientes acotaciones y sus análogas para b y β:

$$\|(1 - x + \frac{1}{n^2})^{-(2\alpha+1)/4}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|(1 - x + \frac{1}{n^2})^{-(2\alpha+1)/4}(1-x)^{-a}\|_{L^q((1-x)^{\alpha})} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pero, por el teorema de la convergencia monótona y por ser $ap + \alpha > -1$, de acuerdo con (2.11), estas son equivalentes a las acotaciones:

$$\|(1 - x)^{-(2\alpha+1)/4}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \leq C$$

y
$$\|(1-x)^{-(2\alpha+1)/4}(1-x)^{-a}\|_{L^q((1-x)^\alpha)} \le C.$$
Y estas desigualdades, con sus análogas para b y β, equivalen, a su vez, a las siguientes:
$$w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4} \in L^p_*(u^p w)$$
y
$$w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}u(x)^{-1} \in L^q(w),$$
que son, respectivamente, (2.12) y (2.13), las cuales suponemos ciertas. Por lo tanto, los operadores $W_{1,n}$ están uniformemente débilmente acotados.

b) Acotación uniforme de los operadores $W_{3,n}$:

Según su definición,
$$W_{3,n}(f,x) = -(1-x^2)Q_n(x)\int_{-1}^{1}\frac{f(t)P_{n+1}(t)w(t)}{x-t}\,dt =$$
$$= -(1-x^2)Q_n(x)H(fP_{n+1}w,x),$$
donde por H denotamos la transformada de Hilbert sobre $[-1,1]$. Vamos a demostrar la acotación fuerte uniforme de estos operadores.
$$\|W_{3,n}f\|_{L^p(u^pw)} \le C\|f\|_{L^p(u^pw)}\ \forall f \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|(1-x^2)Q_n(x)H(fP_{n+1}w,x)\|_{L^p(u^pw)} \le C\|f\|_{L^p(u^pw)}\ \forall f \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|(1-x^2)Q_n(x)Hg(x)\|_{L^p(u^pw)} \le C\|g(P_{n+1}w)^{-1}\|_{L^p(u^pw)}\ \forall g \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|Hg\|_{L^p((1-x^2)^p|Q_n|^pu^pw)} \le C\|g\|_{L^p(|P_{n+1}|^{-p}u^pw^{1-p})}\ \forall g.$$
En virtud de (2.15) (no es necesario sustituir n por $n+1$ en la cota, ya que $n \sim n+1$),
$$|P_{n+1}(x)|^{-p}u(x)^pw(x)^{1-p} \ge$$
$$\ge C(1-x)^{ap+\alpha(1-p)}(1-x+\frac{1}{n^2})^{p(2\alpha+1)/4}(1+x)^{bp+\beta(1-p)}(1+x+\frac{1}{n^2})^{p(2\beta+1)/4}.$$
Y, por la desigualdad correspondiente para los polinomios Q_n, ortonormales con respecto a $(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$,
$$|Q_n(x)|^p(1-x^2)^pu(x)^pw(x) \le$$
$$\le C(1-x)^{p+ap+\alpha}(1-x+\frac{1}{n^2})^{-p(2\alpha+3)/4}(1+x)^{p+bp+\beta}(1+x+\frac{1}{n^2})^{-p(2\beta+3)/4}.$$
Por consiguiente, basta con que se cumpla:
$$\|Hg\|_{L^p(\overline{u}_n)} \le C\|g\|_{L^p(\overline{v}_n)}\ \forall g,\ \forall n,$$

donde

$$\overline{u}_n(x) = (1-x)^{p+ap+\alpha}(1-x+\frac{1}{n^2})^{-p(2\alpha+3)/4}(1+x)^{p+bp+\beta}(1+x+\frac{1}{n^2})^{-p(2\beta+3)/4}$$

y

$$\overline{v}_n(x) = (1-x)^{ap+\alpha(1-p)}(1-x+\frac{1}{n^2})^{p(2\alpha+1)/4}(1+x)^{bp+\beta(1-p)}(1+x+\frac{1}{n^2})^{p(2\beta+1)/4}.$$

Como vimos en el capítulo primero, para esta acotación es suficiente con que, para algún $\delta > 1$,

$$(\overline{u}_n, \overline{v}_n) \in A_p^\delta((-1,1)) \text{ uniformemente.}$$

Esta condición equivale, por los teoremas 1.38 y 1.39, a las siguientes desigualdades y sus análogas para b y β:

$$p + ap + \alpha > -1 \Leftrightarrow ap + \alpha + 1 > -p \Leftrightarrow a + (\alpha+1)(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}) > -1 - \tfrac{\alpha+1}{2} \Leftarrow (2.11);$$

$$ap+\alpha(1-p) < p-1 \Leftrightarrow ap+(\alpha+1)(1-p) < 0 \Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{2}) < \tfrac{\alpha+1}{2} \Leftarrow (2.9);$$

$$ap + \alpha(1-p) \le p + ap + \alpha \Leftrightarrow -\alpha p \le p \Leftrightarrow 0 \le \alpha + 1, \text{ lo cual es cierto;}$$

$$ap + \alpha(1-p) + \tfrac{2\alpha+1}{4}p \le p + ap + \alpha - \tfrac{2\alpha+3}{4}p \Leftrightarrow -\alpha p + \tfrac{2\alpha+1}{4}p \le p - \tfrac{2\alpha+3}{4}p,$$

lo que también es cierto;

$$p+ap+\alpha-\tfrac{2\alpha+3}{4}p > -1 \Leftrightarrow ap+(\alpha+1) > \tfrac{2\alpha-1}{4}p \Leftrightarrow a+(\alpha+1)(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{2}) > -\tfrac{3}{4} \Leftarrow (2.12),$$

ya que $(2.12) \Rightarrow (2.14)$;

$$ap + \alpha(1-p) + \tfrac{2\alpha+1}{4}p < p - 1 \Leftrightarrow ap + (\alpha+1)(1-p) < -\tfrac{2\alpha+1}{4}p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + (\alpha+1)(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}) < \tfrac{1}{4} \Leftarrow (2.8).$$

Es decir: la condición A_p^δ uniforme anterior se verifica y, por lo tanto, los operadores $W_{3,n}$ están uniformemente acotados, no sólo en norma débil, sino también en la fuerte.

c) Los operadores $W_{2,n}$ no están uniformemente débilmente acotados si en (2.14) se da alguna de las igualdades:

$$W_{2,n}(f,x) = P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} \frac{f(t)(1-t^2)Q_n(t)w(t)}{x-t}\,dt = P_{n+1}(x)H((1-t^2)fQ_nw,x);$$

Luego

$$\|W_{2,n}f\|_{L_*^p(u^p w)} \le C\|f\|_{L^p(u^p w)}\ \forall f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|P_{n+1}(x)H((1-t^2)fQ_nw,x)\|_{L_*^p(u^p w)} \le C\|f\|_{L^p(u^p w)}\ \forall f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|P_{n+1}Hg\|_{L^p_*(u^p\, w)} \le C\|g(x)(1-x^2)^{-1}Q_n(x)^{-1}w(x)^{-1}\|_{L^p(u^p w)}\ \forall g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|P_{n+1}Hg\|_{L^p_*(u^p\, w)} \le C\|g\|_{L^p((1-x^2)^{-p}|Q_n|^{-p}u^p w^{1-p})}\ \forall g.$$

Supongamos ahora que en (2.14) se tiene, por ejemplo,

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}.$$

Según el lema 2.8, la acotación de W_2 implicaría esta otra:

$$\left(\int_{-1}^{r}\frac{|f(t)|\,dt}{s-t}\right)\|P_{n+1}\chi_{(r,s)}\|_{L^p_*(u^p\, w)} \le C\|f\chi_{(-1,r)}\|_{L^p((1-x^2)^{-p}|Q_n|^{-p}u^p w^{1-p})},$$

donde la constante C es la misma de antes y la desigualdad se verificaría $\forall f$, $\forall n$, $\forall r,s$ tales que $-1\le r\le s\le 1$.
Tomando $s=1$, $r>0$ y $f(x)=(1-x)^{-1/p+1-a-\alpha(1/p-1)}|Q_n(x)|\chi_{(0,1)}(x)$ y teniendo en cuenta que, si $x\in(0,1)$, entonces $u(x)\sim(1-x)^a$ y $w(x)\sim(1-x)^\alpha$, resultaría:

$$\left[\int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)}|Q_n(x)|\,dx\right]\|P_{n+1}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \le$$

$$\le C\|(1-x)^{-1/p}\chi_{(0,r)}\|_{L^p(dx)}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall r\in(0,1).$$

Es decir:

$$\left[\int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)}|Q_n(x)|\,dx\right]\|P_{n+1}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \le \tag{2.16}$$

$$\le C|\log(1-r)|^{1/p}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall r\in(0,1).$$

Pero, por el lema 2.3,

$$\varliminf_{n\to\infty}\|P_{n+1}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \ge K\|w(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \ge$$

$$\ge K\|(1-x)^{-(2\alpha+1)/4}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})}.$$

Suponiendo entonces que $a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$, se tiene:

$$-\frac{2\alpha+1}{4}p+(ap+\alpha)+1=ap+\alpha(1-\frac{p}{2})-\frac{p}{4}+1=ap+(\alpha+1)(1-\frac{p}{2})+\frac{p}{4}=0;$$

además, (2.11) $\Rightarrow ap+\alpha\ne -1$. De aquí se deduce, por el lema 2.7, que

$$\|(1-x)^{-(2\alpha+1)/4}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})}=K,$$

donde K depende sólo de α, a y p. Luego:

$$\varliminf_{n\to\infty} \|P_{n+1}\chi_{(r,1)}\|_{L^p_*((1-x)^{ap+\alpha})} \geq C \ \forall r \in (0,1). \tag{2.17}$$

La primera integral de (2.16) también puede ser acotada inferiormente, con ayuda del teorema 1.11:

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)} |Q_n(x)|\, dx \geq$$

$$\geq K \int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)} [(1-x^2)w(x)]^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\, dx \geq$$

$$\geq K \int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)-1/2-\alpha/2-1/4}\, dx.$$

De nuevo, si $a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, se tiene:

$$-\frac{1}{p} - a - \alpha(\frac{1}{p}-1) - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{p} - a - \alpha(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$$

$$= -a - (\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - 1 - \frac{1}{4} = -1,$$

así es que

$$\int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)-1/2-\alpha/2-1/4}\, dx = \int_0^r \frac{dx}{1-x} = |\log(1-r)|.$$

Luego

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_0^r (1-x)^{-1/p-a-\alpha(1/p-1)} |Q_n(x)|\, dx \geq K|\log(1-r)|.$$

De esta acotación y de (2.17) se llega, tomando límites inferiores en (2.16), a que, $\forall r \in (0,1)$:

$$|\log(1-r)| \leq K|\log(1-r)|^{1/p}; \ |\log(1-r)|^{1/q} \leq K,$$

lo cual es falso. Por lo tanto, no puede tenerse $a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; de la misma manera se demuestra que tampoco puede suceder la igualdad análoga con b y β. En consecuencia, las desigualdades (2.14) deben ser estrictas y obtenemos (2.10). Con esto, queda demostrado el teorema.

Teorema 2.10. *Sean $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ sobre el intervalo $[-1,1]$ ($\alpha,\beta > -1$), $d\mu(x) = w(x)\,dx$, S_nf la suma parcial enésima del desarrollo de Fourier de polinomios de Jacobi, ortonormales con respecto a $d\mu$. Sean $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ y $1 < p < \infty$.*
Si existe una constante C tal que $\forall f \in L^p(u^p\,d\mu)$ se verifica la desigualdad

$$\|uS_nf\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|uf\|_{L^p(d\mu)}\ \forall n \geq 0,$$

entonces deben cumplirse las condiciones (2.8), (2.9), (2.10) y:

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq -\frac{\alpha+1}{2}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq -\frac{\beta+1}{2}. \tag{2.18}$$

Demostración:
Es análoga a la del teorema 2.9; la diferencia entre (2.11) y (2.18) se debe a que en el teorema 2.9 se llega a que $1 \in L^p_*(u^pw)$ y esto equivale a que $1 \in L^p(u^pw)$, mientras que ahora se tiene $u \in L^p_*(w)$, lo que no implica $u \in L^p(w)$.

Corolario 2.11. *Con la notación precedente y $\alpha,\beta \geq -1/2$, no hay acotación débil $\|uS_nf\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|uf\|_{L^p(d\mu)}$ $\forall n \geq 0$ en los extremos del intervalo de convergencia en media. Tampoco existe si $u = 1$ y $\alpha,\beta > -1$.*

Demostración:
Son casos particulares de los teoremas 2.10 y 2.9, respectivamente. Sólo hay que tener en cuenta que, si $\alpha,\beta \geq -1/2$, (2.10) implica la desigualdad estricta en (2.18). En los dos casos, las condiciones (2.8)-(2.11) o (2.8)-(2.10) y (2.18) son las que determinan el intervalo abierto de convergencia en media.

A la vista del corolario 2.11, podemos preguntarnos si, al menos, existe acotación débil restringida en los extremos del intervalo de convergencia en media; es decir, si se cumple:

a) $\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\mu)}$, $\forall E$ medible, si $\alpha,\beta \geq -1/2$;

b) $\|S_n\chi_E\|_{L^p_*(d\mu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\mu)}$, $\forall E$ medible, si $\alpha,\beta > -1$,

ambas acotaciones cuando p ($1 < p < \infty$) satisface las desigualdades (2.8)-(2.11), pero no estrictas. Recordemos que, por teoría de interpolación, la acotación débil restringida de los operadores $(uS_n) \circ u^{-1}$ en los extremos de un intervalo implica su acotación en media para los p intermedios; en consecuencia, no puede existir acotación débil restringida más que en los extremos del intervalo de convergencia en media (además de este intervalo).

Esta acotación fue demostrada por Chanillo ([CH]) cuando $\alpha = \beta = 0$ (polinomios de Legendre) y $u = 1$ y generalizada en [GPV] para $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$ y $u = 1$.

El siguiente lema permite estudiar la acotación débil restringida en uno solo de los extremos del intervalo de convergencia, puesto que de ella se deducirá la acotación en el otro extremo.

Lema 2.12. *Sea S_n el operador suma parcial enésima del desarrollo de Fourier con respecto a una medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$ sobre $\mathbb{R}$. Sean u un peso, $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Supongamos que existe una constante C tal que:*

$$\|u^{-1}S_n(u\chi_E)\|_{L^q_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^q(w)}\ \forall n,\ \forall E \textit{ medible.}$$

Entonces, también existe una constante C tal que:

$$\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E \textit{ medible.}$$

Demostración:
Los operadores $(uS_n) \circ u^{-1}$ y $(u^{-1}S_n) \circ u$ son adjuntos con respecto a w, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} guS_n(u^{-1}f)w = \int_{\mathbb{R}} fu^{-1}S_n(ug)w. \tag{2.19}$$

En efecto: para cada función h, sean $c_n(h)$ los coeficientes de Fourier de h; es decir,

$$c_n(h) = \int_{\mathbb{R}} hP_nw, \qquad S_nh = \sum_{k=0}^{n} c_k(h)P_k,$$

donde $\{P_n\}$ son los polinomios ortonormales. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} guS_n(u^{-1}f)w = \sum_{k=0}^{n} c_k(u^{-1}f)\int_{\mathbb{R}} guP_kw = \sum_{k=0}^{n} c_k(u^{-1}f)c_k(gu),$$

lo que, por el mismo camino, es igual a $\int_{\mathbb{R}} fu^{-1}S_n(ug)w$.
Sea E un conjunto medible (podemos suponer que $0 < \int_E w < \infty$). Entonces, según el lema 2.2:

$$\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \leq \sup_F \frac{\|\chi_F uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^1(w)}}{\|\chi_F\|_{L^q(w)}},$$

donde el supremo se toma en todos los conjuntos medibles F de medida w positiva y finita. Ahora bien, si F es uno de tales conjuntos y definimos $G = \{x \in F; u(x)S_n(u^{-1}\chi_E, x) > 0\}$ y $H = \{x \in F; u(x)S_n(u^{-1}\chi_E, x) < 0\}$, de (2.19) se deduce:

$$\|\chi_F uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^1(w)} = \int_{\mathbb{R}} \chi_G uS_n(u^{-1}\chi_E)w - \int_{\mathbb{R}} \chi_H uS_n(u^{-1}\chi_E)w =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_G u S_n(u^{-1}\chi_E) w \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_H u S_n(u^{-1}\chi_E) w \right| =$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_E u^{-1} S_n(u\chi_G) w \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_E u^{-1} S_n(u\chi_H) w \right| \le$$
$$\le \|\chi_E u^{-1} S_n(u\chi_G)\|_{L^1(w)} + \|\chi_E u^{-1} S_n(u\chi_H)\|_{L^1(w)}.$$

De aquí se llega fácilmente a que:

$$\sup_F \frac{\|\chi_F u S_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^1(w)}}{\|\chi_F\|_{L^q(w)}} \le C \sup_F \frac{\|\chi_E u^{-1} S_n(u\chi_F)\|_{L^1(w)}}{\|\chi_F\|_{L^q(w)}}.$$

Aplicando ahora, por este orden, el lema 2.2 y la acotación débil restringida de los operadores $(u^{-1}S_n) \circ u$, resulta:

$$\sup_F \frac{\|\chi_E u^{-1} S_n(u\chi_F)\|_{L^1(w)}}{\|\chi_F\|_{L^q(w)}} = \sup_F \frac{\|\chi_E\|_{L^p(w)}}{\|\chi_F\|_{L^q(w)}} \frac{\|\chi_E u^{-1} S_n(u\chi_F)\|_{L^1(w)}}{\|\chi_E\|_{L^p(w)}} \le$$

$$\le C \sup_F \frac{\|\chi_E\|_{L^p(w)}}{\|\chi_F\|_{L^q(w)}} \|u^{-1} S_n(u\chi_F)\|_{L^q_*(w)} \le C \|\chi_E\|_{L^p(w)},$$

de donde $\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ y el lema está probado.

Examinaremos ahora la acotación débil restringida con un peso para una medida de Jacobi, cuando $\alpha, \beta \ge -1/2$. En este caso, el intervalo de convergencia en media viene determinado por las condiciones (2.8) y (2.10). El resultado es el siguiente:

Teorema 2.13. *Sean $\alpha, \beta \ge -1/2$, $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en $[-1,1]$ y S_n el operador suma parcial enésima del desarrollo de Fourier con respecto a la medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$. Sean $1 < p < \infty$ y $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$. Si se verifican las desigualdades*

$$(2.20) \qquad a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) < \frac{1}{4},$$

$$(2.21) \qquad a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \ge -\frac{1}{4}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \ge -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)} \ \forall n, \ \forall E \text{ medible.}$$

Demostración:
Descomponemos el operador S_n en suma de tres operadores, $W_{1,n}$, $W_{2,n}$ y $W_{3,n}$, tal y como se hizo en el teorema 2.9 y, con las hipótesis (2.20) y (2.21), $W_{1,n}$ y

$W_{3,n}$ están uniformemente débilmente acotados, de manera que sólo hay que ver la acotación débil restringida uniforme de los operadores $W_{2,n}$. Estos vienen definidos por:

$$W_{2,n}(f,x) = P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1}\frac{f(t)(1-t^2)Q_n(t)w(t)}{x-t}\,dt = P_{n+1}(x)H((1-t^2)fQ_nw,x).$$

Se trata entonces de demostrar que, si se cumplen (2.20) y (2.21), existe una constante C tal que

$$\|uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\forall n,\ \forall E \text{ medible.}$$

Por la simetría de las condiciones (2.20) y (2.21) respecto de $x=\pm 1$, basta probar la acotación precedente cuando E está contenido en $[0,1)$. La demostración sigue el siguiente esquema:

a) $\|\chi_{[-3/4,3/4]}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$.

b) $\|\chi_{(-1,-3/4]}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$.

c) $\|\chi_{[3/4,1)}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$.

En este último apartado, tomaremos una sucesión de intervalos I_k disjuntos, de manera que $\bigcup_{k=2}^{\infty} I_k = [3/4,1)$; y, para cada k, hacemos $[0,1) = J_{k1}\cup J_{k2}\cup J_{k3}$, donde la unión es también disjunta. Por consiguiente,

$$\chi_{[3/4,1)}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E) = \sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E) = \sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}})+$$

$$+\sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}) + \sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}}).$$

Hay que tener presente que todos estos sumatorios constan, para cada x, de un solo sumando no nulo. En el apartado c), probaremos:

c1) $\|\sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$.

c2) $\|\sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$.

c3) $\|\sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$.

Usaremos repetidamente las acotaciones:

$$\text{(2.22)}\qquad \begin{cases} |P_n(x)| \le C(1-x)^{-(2\alpha+1)/4}(1+x)^{-(2\beta+1)/4} \\ |Q_n(x)| \le C(1-x)^{-(2\alpha+3)/4}(1+x)^{-(2\beta+3)/4} \end{cases} \qquad \forall x\in(-1,1),$$

que se deducen de (2.15), teniendo en cuenta que $\alpha, \beta \geq -1/2$.
a) $\|\chi_{[-3/4,3/4]} u W_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$:
En $[-3/4, 3/4]$, $1-x \sim 1$ y $1+x \sim 1$; así que, usando las acotaciones (2.22), resulta:

$$\begin{aligned}\|\chi_{[-3/4,3/4]} u W_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} &= \\ = \|\chi_{[-3/4,3/4]}(x)u(x)P_{n+1}(x)H((1-t^2)u^{-1}\chi_E Q_n w, x)\|_{L^p_*(w)} &\leq \\ \leq C\|\chi_{[-3/4,3/4]} H((1-t^2)u^{-1}\chi_E Q_n w)\|_{L^p((1-x)^\alpha(1+x)^\beta)} &\leq \\ \leq C\|\chi_{[-3/4,3/4]} H((1-t^2)u^{-1}\chi_E Q_n w)\|_{L^p((1-x)^r(1+x)^s)},&\end{aligned}$$

donde podemos elegir r y s como queramos. Si conseguimos que esté acotado el operador

$$H : L^p((1-x)^{ap+\alpha-p(2\alpha+1)/4}(1+x)^{bp+\beta-p(2\beta+1)/4}) \longrightarrow L^p((1-x)^r(1+x)^s), \tag{2.23}$$

entonces, como de (2.22) se deduce que:

$$|(1-x^2)u(x)^{-1}Q_n(x)w(x)| \leq C(1-x)^{1-a-(2\alpha+3)/4+\alpha}(1+x)^{1-b-(2\beta+3)/4+\beta} =$$
$$= C(1-x)^{-a+(2\alpha+1)/4}(1+x)^{-b+(2\beta+1)/4},$$

tendremos:

$$\begin{aligned}\|\chi_{[-3/4,3/4]} H((1-t^2)u^{-1}\chi_E Q_n w)\|_{L^p((1-x)^r(1+x)^s)} &\leq \\ \leq \|H((1-t^2)u^{-1}\chi_E Q_n w)\|_{L^p((1-x)^r(1+x)^s)} &\leq \\ \leq C\|(1-x^2)u^{-1}\chi_E Q_n w\|_{L^p((1-x)^{ap+\alpha-p(2\alpha+1)/4}(1+x)^{bp+\beta-p(2\beta+1)/4})} &\leq \\ \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)},&\end{aligned}$$

y habremos acabado.
Para la acotación (2.23) de la transformada de Hilbert, es suficiente con que

$$\big((1-x)^r(1+x)^s, (1-x)^{ap+\alpha-p(2\alpha+1)/4}(1+x)^{bp+\beta-p(2\beta+1)/4}\big) \in A_p^\delta((-1,1))$$

para algún $\delta > 1$. Esta condición equivale (por los teoremas 1.37 y 1.39) a las siguientes desigualdades y sus análogas para s, b y β:

$$\begin{cases} r > -1, \\ ap + \alpha - p(2\alpha+1)/4 < p - 1, \\ ap + \alpha - p(2\alpha+1)/4 \leq r \end{cases}$$

La segunda de ellas se cumple:

$$ap + \alpha - p\tfrac{2\alpha+1}{4} < p - 1 \Leftrightarrow a + \tfrac{\alpha+1}{p} < \tfrac{2\alpha+5}{4} \Leftrightarrow a + (\alpha+1)(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}) < \tfrac{3}{4} \Leftarrow (2.20).$$

Y, para las otras dos, basta tomar r suficientemente grande.
b) $\|\chi_{(-1,-3/4]}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$:
Puesto que $E \subset [0,1)$, $|\chi_{(-1,-3/4]}(x)u(x)W_{2,n}(u^{-1}\chi_E, x)| =$

$$= \left|\chi_{(-1,-3/4]}(x)u(x)P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1}\frac{u(t)^{-1}\chi_E(t)(1-t^2)Q_n(t)w(t)}{x-t}\,dt\right| \le$$

$$\le C\chi_{(-1,-3/4]}(x)u(x)\,|P_{n+1}(x)|\int_{-1}^{1}(1-t)^{-a+1-(2\alpha+3)/4}\chi_E(t)w(t)\,dt \le$$

$$\le C\chi_{(-1,-3/4]}(x)u(x)\,|P_{n+1}(x)|\,\|(1-t)^{-a+1-(2\alpha+3)/4}\|_{L^q(w)}\|\chi_E\|_{L^p(w)} \le$$

$$\le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\chi_{(-1,-3/4]}(x)u(x)\,|P_{n+1}(x)|\,;$$

este último paso se debe a que $[-a+1-(2\alpha+3)/4]q+\alpha+1>0$:

$$[-a+1-(2\alpha+3)/4]q+\alpha+1>0 \Leftrightarrow -a+(1-2\alpha)/4+(\alpha+1)(1-1/p)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a+(\alpha+1)(1/2-1/p)+3/4>0 \Leftrightarrow a+(\alpha+1)(1/p-1/2)<3/4 \Leftarrow (2.20).$$

Por consiguiente, aplicando lo anterior y (2.22) se tiene:

$$\|\chi_{(-1,-3/4]}uW_2(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\|\chi_{(-1,-3/4]}uP_{n+1}\|_{L^p_*(w)} \le$$

$$\le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\|\chi_{(-1,-3/4]}(1+x)^{b-(2\beta+1)/4}\|_{L^p_*((1+x)^\beta)}.$$

Pero $\|\chi_{(-1,-3/4]}(1+x)^{b-(2\beta+1)/4}\|_{L^p_*((1+x)^\beta)} < +\infty$: según el lema 2.7, sólo hay que comprobar que $[b-(2\beta+1)/4]p+\beta+1\ge 0$;

$$[b-\tfrac{2\beta+1}{4}]p+\beta+1\ge 0 \Leftrightarrow b+\tfrac{\beta+1}{p}\ge\tfrac{2\beta+1}{4} \Leftrightarrow b+(\beta+1)(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{2})\ge -\tfrac{1}{4} \Leftarrow (2.21).$$

En consecuencia, $\|\chi_{(-1,-3/4]}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$, como queríamos demostrar.
c) $\|\chi_{[3/4,1)}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$; para seguir con el esquema antes expuesto, definimos los siguientes intervalos:

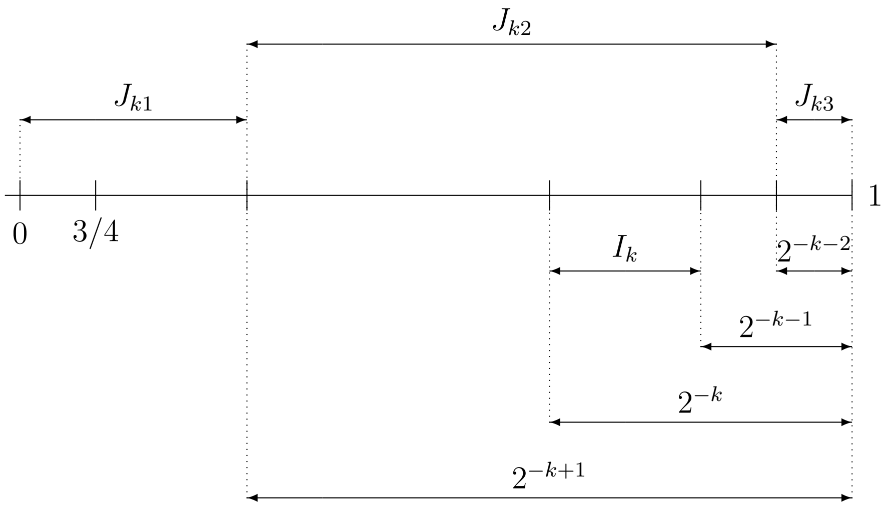
$$I_k=[1-2^{-k},1-2^{-k-1}),\qquad J_{k1}=[0,1-2^{-k+1}),$$

$$J_{k2}=[1-2^{-k+1},1-2^{-k-2}),\qquad J_{k3}=[1-2^{-k-2},1)$$

$$(k=2,3,\dots).$$

Evidentemente, se tiene que $\bigcup_{k=2}^{\infty} I_k=[3/4,1)$ y, para cada k, $[0,1)=J_{k1}\cup J_{k2}\cup J_{k3}$; y las uniones son disjuntas en los dos casos.
No es difícil comprobar las siguientes propiedades:

$$\forall k,\ \forall x\in I_k\ 1-x\sim 2^{-k}. \tag{2.24}$$



$$\forall k,\ \forall t \in J_{k2}\ 1-t \sim 2^{-k}. \tag{2.25}$$

$$\forall k,\ \forall x \in I_k,\ \forall t \in J_{k1}\ 2^{-k+1} \leq 1-t \leq 2(x-t) \leq 2(1-t). \tag{2.26}$$

$$\forall k,\ \forall x \in I_k,\ \forall t \in J_{k3}\ 1-t \leq 2^{-k-2} \leq t-x \leq 2^{-k}. \tag{2.27}$$

c1) $\| \sum_k \chi_{I_k} u W_{2,n}(u^{-1}\chi_E \chi_{J_{k1}})\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n, \forall E \subset [0,1)$:

$\chi_{I_k}(x)u(x)W_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}, x) = \chi_{I_k}(x)u(x)P_{n+1}(x)H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}Q_n w, x)$;

según (2.26), $x \in I_k \Rightarrow |H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}Q_n w, x)| =$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)u(t)^{-1}\chi_E(t)\chi_{J_{k1}}(t)Q_n(t)w(t)}{x-t}\, dt \right| \leq C \int_{-1}^{1} u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}|Q_n|w =$$

$$= \|u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}Q_n\|_{L^1(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\|u^{-1}\chi_{J_{k1}}Q_n\|_{L^q_*(w)};$$

la última desigualdad se deduce del lema 2.2 o de propiedades de los espacios de Lorentz. Ahora bien, por ser $1+t \sim 1$ en J_{k1} y por (2.22), (2.21), (2.24) y el lema 2.7,

$$\|u^{-1}\chi_{J_{k1}}Q_n\|_{L^q_*(w)} \leq C\|\chi_{J_{k1}}(1-t)^{-(\alpha+1)/q}(1-t)^{(\alpha+1)/q-a-(2\alpha+3)/4}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \leq$$

$$\leq C(1-x)^{(\alpha+1)/q-a-(2\alpha+3)/4}\|\chi_{J_{k1}}(1-t)^{-(\alpha+1)/q}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} =$$

$$= C(1-x)^{(\alpha+1)/q-a-(2\alpha+3)/4}.$$

Por consiguiente, $x \in I_k \Rightarrow |H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}Q_n w, x)| \leq$

$$\leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}(1-x)^{(\alpha+1)/q-a-(2\alpha+3)/4};$$

teniendo en cuenta de nuevo (2.22) y que el sumatorio consta en realidad de un solo sumando, resulta:

$$\left|\sum_k \chi_{I_k}(x)u(x)W_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}},x)\right| =$$

$$= \left|\sum_k \chi_{I_k}(x)u(x)P_{n+1}(x)H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}}Q_n w,x)\right| \leq$$

$$\leq C(1-x)^a(1-x)^{-(2\alpha+1)/4}\|\chi_E\|_{L^p(w)}(1-x)^{(\alpha+1)/q-a-(2\alpha+3)/4} =$$

$$= C\|\chi_E\|_{L^p(w)}(1-x)^{(\alpha+1)/q-(\alpha+1)} = C\|\chi_E\|_{L^p(w)}(1-x)^{-(\alpha+1)/p}.$$

Aplicando el lema 2.7, se tiene, finalmente:

$$\|\sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k1}})\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\|(1-x)^{-(\alpha+1)/p}\|_{L^p_*(w)} \leq$$

$$\leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}.$$

Con esto, queda demostrado el apartado c1).
c2) $\|\sum_k \chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$: sea $k \geq 2$; por (2.22) y (2.24),

$$\|\chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} = C\|\chi_{I_k}uP_{n+1}H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w)\|_{L^p_*(w)} \leq$$

$$\leq C\|\chi_{I_k}(1-x)^{a-(2\alpha+1)/4}H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w,x)\|_{L^p_*((1-x)^\alpha)} \leq$$

$$\leq C(2^{-k})^{a-(2\alpha+1)/4+\alpha/p}\|\chi_{I_k}H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w,x)\|_{L^p_*(dx)} \leq$$

$$\leq C(2^{-k})^{a-(2\alpha+1)/4+\alpha/p}\|H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w,x)\|_{L^p(dx)}.$$

Debido a que la transformada de Hilbert es un operador acotado en $L^p(dx)$, esta última expresión se puede acotar por:

$$C(2^{-k})^{a-(2\alpha+1)/4+\alpha/p}\|(1-x^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w\|_{L^p(dx)};$$

y, por (2.25) y (2.22), esta se acota, a su vez, por:

$$C\|(1-x)^{a-(2\alpha+1)/4+\alpha/p}(1-x^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w\|_{L^p(dx)} \leq$$

$$\leq C\|(1-x)^{\alpha/p}\chi_E\chi_{J_{k2}}\|_{L^p(dx)} \leq C\|\chi_E\chi_{J_{k2}}\|_{L^p(w)}.$$

Por lo tanto, $\|\chi_{I_k}uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\chi_{J_{k2}}\|_{L^p(w)}$.

Gracias a que las funciones $\chi_{I_k} uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})$ son de soporte disjunto, se cumple:

$$\|\sum_k \chi_{I_k} uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|^p_{L^p(w)} \leq \sum_k \|\chi_{I_k} uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|^p_{L^p(w)}.$$

Y, aplicando sucesivamente la desigualdad anterior y que $\sum_k \chi_{J_{k2}} \leq 3$, esta expresión se puede acotar por:

$$C\sum_k \|\chi_E\chi_{J_{k2}}\|^p_{L^p(w)} = C\|\sum_k \chi_E\chi_{J_{k2}}\|^p_{L^p(w)} \leq C\|\chi_E\|^p_{L^p(w)}.$$

Es decir:

$$\|\sum_k \chi_{I_k} uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k2}})\|^p_{L^p(w)} \leq C\|\chi_E\|^p_{L^p(w)}$$

y se cumple c2).
c3) $\|\sum_k \chi_{I_k} uW_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}})\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$:
Sea $k \geq 2$; por (2.27), el lema 2.2 y (2.22), resulta:

$$x \in I_k \Rightarrow |H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}}Q_n w, x)| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)u(t)^{-1}\chi_E(t)\chi_{J_{k3}}(t)|Q_n(t)|w(t)}{|x-t|}\,dt \leq$$

$$\leq C2^k \int_{-1}^1 (1-t^2)u(t)^{-1}\chi_E(t)\chi_{J_{k3}}(t)|Q_n(t)|w(t)\,dt \leq$$

$$\leq C2^k\|\chi_E\chi_{J_{k3}}u^{-1}(1-t)Q_n\|_{L^1(w)} \leq C2^k\|\chi_E\|_{L^p(w)}\|\chi_{J_{k3}}u^{-1}(1-t)Q_n\|_{L^q_*(w)} \leq$$

$$\leq C2^k\|\chi_E\|_{L^p(w)}\|(1-t)^{-a+1-(2\alpha+3)/4}\chi_{J_{k3}}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)}.$$

Calculemos ahora la norma $\|(1-t)^{-a+1-(2\alpha+3)/4}\chi_{J_{k3}}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)}$, mediante el lema 2.7, teniendo en cuenta que $J_{k3} = [1-2^{-k-2}, 1)$:

$$[-a+1-(2\alpha+3)/4]q+\alpha+1 \geq 0 \Leftrightarrow a+(2\alpha-1)/4+(\alpha+1)(-1/q) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+(2\alpha-1)/4+(\alpha+1)(1/p-1) \leq 0 \Leftrightarrow a+(\alpha+1)(1/p-1/2)-3/4 \leq 0 \Leftarrow (2.20);$$

por el citado lema,

$$\|(1-t)^{-a+1-(2\alpha+3)/4}\chi_{J_{k3}}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} = C(2^{-k})^{-a+1-(2\alpha+3)/4+(\alpha+1)/q}.$$

Es decir:

$$x \in I_k \Rightarrow |H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}}Q_n w, x)| \leq$$

$$\leq C(2^{-k})^{-a-(2\alpha+3)/4+(\alpha+1)/q}\|\chi_E\|_{L^p(w)} = C(2^{-k})^{-a+(2\alpha+1)/4-(\alpha+1)/p}\|\chi_E\|_{L^p(w)} \leq$$

$$\leq C(1-x)^{-a+(2\alpha+1)/4-(\alpha+1)/p}\|\chi_E\|_{L^p(w)},$$

por ser $1/p+1/q=1$ y por (2.24). Por lo tanto, utilizando (2.22):

$$|\chi_{I_k}(x)u(x)W_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}},x)| =$$

$$= |\chi_{I_k}(x)u(x)P_{n+1}(x)H((1-t^2)u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}}Q_n w,x)| \leq$$

$$\leq C\chi_{I_k}(1-x)^{-(\alpha+1)/p}\|\chi_E\|_{L^p(w)};$$

o, lo que es lo mismo (los intervalos I_k son disjuntos):

$$|\sum_k \chi_{I_k}(x)u(x)W_{2,n}(u^{-1}\chi_E\chi_{J_{k3}},x)| \leq C\chi_{[3/4,1)}(1-x)^{-(\alpha+1)/p}\|\chi_E\|_{L^p(w)};$$

el lema 2.7 proporciona ahora la acotación c3).
Con esto, el teorema queda demostrado.

El teorema 2.13 afirma que existe acotación débil restringida, con un peso, en el extremo superior del intervalo de convergencia en media. El lema 2.12 permite establecer el mismo resultado para el extremo inferior:

Corolario 2.14. *Sean $\alpha,\beta \geq -1/2$, $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en $[-1,1]$ y S_n el operador suma parcial enésima del desarrollo de Fourier con respecto a la medida $d\mu(x)=w(x)\,dx$. Sean $1<p<\infty$ y $u(x)=(1-x)^a(1+x)^b$. Si se verifican las desigualdades*

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4},$$

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E \textit{ medible.}$$

<u>Demostración</u>:
Es fácil comprobar que con estas hipótesis existe, por el teorema 2.13, una constante C tal que

$$\|u^{-1}S_n(u\chi_E)\|_{L^q_*(w)} \leq C\|\chi_E\|_{L^q(w)}\ \forall n,\ \forall E \text{ medible;}$$

basta ahora aplicar el lema 2.12.

En el teorema 2.13, la condición $\alpha, \beta \geq -1/2$ se impone para asegurar las acotaciones uniformes (2.22) de los polinomios P_n; en el caso $\alpha < -1/2$ o $\beta < -1/2$, dichas acotaciones no son ciertas y es preciso usar las estimaciones no uniformes (2.15). No obstante, podemos repetir la demostración del teorema 2.13, al menos cuando $u = 1$. En este caso, si $1 < p < \infty$, existe convergencia en media si y sólo si:

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4},$$

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}.$$

Cuando $\max\{\alpha, \beta\} > -1/2$, el intervalo de convergencia no resulta $(1, +\infty)$ y será entonces cuando nuestro resultado implique la acotación débil restringida en los extremos de dicho intervalo. El siguiente lema es simplemente un resultado auxiliar, necesario en la demostración del teorema posterior.

Lema 2.15. *Sean $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < r < 1$, $n \in \mathbb{N}$; supongamos que se cumple: $(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}$. Existe una constante C, independiente de r y de n, tal que*

$$\|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \leq C(1-r)^{1-(\alpha+1)/p}(1-r+n^{-2})^{(2\alpha+1)/4}.$$

Demostración:
Distinguimos varios casos, según los valores de α, r y n.
a) si $\alpha \geq -1/2$.
Como $-(2\alpha+3)/4 < 0$, $(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4} \leq (1-t)^{-(2\alpha+3)/4}$; entonces:

$$\|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \leq \|(1-t)^{(1-2\alpha)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)};$$

Ahora,

$$q(1-2\alpha)/4 + \alpha > -1 \Leftrightarrow (1-2\alpha)/4 + \alpha/q > -1/q \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-2\alpha)/4 + \alpha(1-1/p) > 1/p - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-2\alpha)/4 > (\alpha+1)(1/p-1) \Leftrightarrow 3/4 > (\alpha+1)(1/p-1/2),$$

lo cual es cierto, por hipótesis. Por lo tanto, usando el lema 2.7,

$$\|(1-t)^{(1-2\alpha)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \leq \|(1-t)^{(1-2\alpha)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q((1-t)^\alpha)} =$$
$$= C(1-r)^{(1-2\alpha)/4+(\alpha+1)/q} = C(1-r)^{1+(2\alpha+1)/4-(\alpha+1)/p} \leq$$
$$\leq C(1-r)^{1-(\alpha+1)/p}(1-r+n^{-2})^{(2\alpha+1)/4}.$$

b) si $\alpha < -1/2$ y $1 - r \leq n^{-2}$.

Como $-(2\alpha+3)/4 < 0$, $(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4} \le (n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}$; luego, por el lema 2.7:

$$\|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le$$
$$\le (n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\|(1-t)\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le C(n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}(1-r)^{1+(\alpha+1)/q}.$$

Pero $1-r \le n^{-2} \Rightarrow 1-r+n^{-2} \le 2n^{-2} \Rightarrow (n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4} \le C(1-r+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}$, así que de lo anterior se sigue que:

$$\|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le$$
$$\le C(1-r+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}(1-r)^{1+(\alpha+1)/q} =$$
$$= C(1-r+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}(1-r)^{1-(\alpha+1)/p}(1-r)^{\alpha+1} \le$$
$$\le C(1-r+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}(1-r)^{1-(\alpha+1)/p}(1-r+n^{-2})^{\alpha+1} =$$
$$= C(1-r+n^{-2})^{(2\alpha+1)/4}(1-r)^{1-(\alpha+1)/p}.$$

c) si $\alpha < -1/2$ y $n^{-2} \le 1-r$.
Teniendo en cuenta que $1-2\alpha \ge 0$ y que $t \in (r,1) \Rightarrow 1-t \le 1-r$, resulta:

$$\|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le$$
$$\le \|(1-t+n^{-2})^{(1-2\alpha)/4}\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le$$
$$\le (1-r+n^{-2})^{(1-2\alpha)/4}\|\chi_{(r,1)}(t)\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le C(1-r+n^{-2})^{(1-2\alpha)/4}(1-r)^{(\alpha+1)/q} =$$
$$= C(1-r+n^{-2})^{(2\alpha+1)/4}(1-r+n^{-2})^{-\alpha}(1-r)^{\alpha}(1-r)^{1-(\alpha+1)/p} \le$$
$$\le C(1-r+n^{-2})^{(2\alpha+1)/4}(1-r)^{1-(\alpha+1)/p}.$$

Este último paso se debe a que

$$n^{-2} \le 1-r \Rightarrow (1-r+n^{-2})^{-\alpha}(1-r)^{\alpha} = \left(1+\frac{n^{-2}}{1-r}\right)^{-\alpha} \le C.$$

Con este, quedan estudiados todos los casos posibles y demostrado el lema.

Teorema 2.16. *Sean $\alpha,\beta > -1$, $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en $[-1,1]$ y S_n el operador suma parcial enésima del desarrollo de Fourier con respecto a la medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$. Sea $1 < p < \infty$. Si se verifican las desigualdades*

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4},$$

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \ge -\frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \ge -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|S_n(\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)} \ \forall n,\ \forall E \text{ medible.}$$

Demostración:
Podemos repetir la demostración del teorema 2.13, con pequeños cambios, que se deben a que no tenemos la cota uniforme (2.22) de los polinomios P_n, aunque sí la de los polinomios Q_n, puesto que estos son ortonormales con respecto a $(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,dx$ y tanto $\alpha+1$ como $\beta+1$ son mayores que $-1/2$. Para los polinomios P_n utilizamos las cotas (2.15). Los apartados a) y b) no varían apenas. En cuanto al resto:
c1) $\|\sum_k \chi_{I_k} W_{2,n}(\chi_E\chi_{J_{k1}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$:
Procediendo como en el teorema 2.13, llegamos a que:

$$x\in I_k \Rightarrow \left|H((1-t^2)\chi_E\chi_{J_{k1}}Q_n w, x)\right| \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}(1-x+n^{-2})^{(\alpha+1)/q-(2\alpha+3)/4}.$$

Luego:

$$\left|\sum_k \chi_{I_k}(x)W_{2,n}(\chi_E\chi_{J_{k1}},x)\right| \le$$

$$\le C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}\|\chi_E\|_{L^p(w)}(1-x+n^{-2})^{(\alpha+1)/q-(2\alpha+3)/4} =$$

$$= C(1-x+n^{-2})^{-(\alpha+1)/p}\|\chi_E\|_{L^p(w)} \le C(1-x)^{-(\alpha+1)/p}\|\chi_E\|_{L^p(w)},$$

de donde se deduce c1), como en el teorema 2.13.
c2) $\|\sum_k \chi_{I_k} W_{2,n}(\chi_E\chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}\ \forall n,\ \forall E\subset[0,1)$: sea $k\ge 2$; por (2.15) y (2.24), se tiene:

$$\|\chi_{I_k}W_{2,n}(\chi_E\chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} \le$$

$$\le C(2^{-k}+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(2^{-k})^{\alpha/p}\|H((1-t^2)\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w,x)\|_{L^p(dx)}.$$

Por la acotación de la transformada de Hilbert en $L^p(dx)$, esta última expresión está mayorada por:

$$C(2^{-k}+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(2^{-k})^{\alpha/p}\|(1-x^2)\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w\|_{L^p(dx)};$$

y, por (2.25) y (2.22) (para los polinomios Q_n), esta se acota, a su vez, por:

$$C(2^{-k}+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}\|(1-x)^{\alpha/p}(1-x^2)\chi_E\chi_{J_{k2}}Q_n w\|_{L^p(dx)} \le$$

$$\le C(2^{-k}+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(2^{-k})^{1+\alpha}(2^{-k}+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}\|(1-x)^{\alpha/p}\chi_E\chi_{J_{k2}}\|_{L^p(dx)} \le$$

$$\le C(2^{-k}+n^{-2})^{-(\alpha+1)}(2^{-k})^{\alpha+1}\|\chi_E\chi_{J_{k2}}\|_{L^p(w)} \le C\|\chi_E\chi_{J_{k2}}\|_{L^p(w)}.$$

Por lo tanto,
$$\|\chi_{I_k} W_{2,n}(\chi_E \chi_{J_{k2}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E \chi_{J_{k2}}\|_{L^p(w)}.$$
A partir de esta desigualdad se demuestra la acotación c2), como en el teorema 2.13.
c3) $\|\sum_k \chi_{I_k} W_{2,n}(\chi_E \chi_{J_{k3}})\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)}$ $\forall n$, $\forall E \subset [0,1)$:
Siguiendo la demostración del teorema 2.13, obtenemos:

$$x \in I_k \Rightarrow |H((1-t^2)\chi_E \chi_{J_{k3}} Q_n w, x)| \le$$

$$\le C2^k \|\chi_E\|_{L^p(w)} \|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4} \chi_{J_{k3}}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)}.$$

Por el lema 2.15,

$$\|(1-t)(1-t+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4} \chi_{J_{k3}}\|_{L^q_*((1-t)^\alpha)} \le C(2^{-k})^{1-(\alpha+1)/p}(2^{-k}+n^{-2})^{(2\alpha+1)/4},$$

de donde se sigue, mediante (2.15) y (2.24):

$$|\sum_k \chi_{I_k}(x) W_{2,n}(\chi_E \chi_{J_{k3}}, x)| \le C\chi_{[3/4,1)}(1-x)^{-(\alpha+1)/p} \|\chi_E\|_{L^p(w)}$$

y se llega a la acotación c3).
Con esto, el teorema queda demostrado.

De nuevo, del teorema anterior se deduce el mismo resultado para el extremo inferior del intervalo de convergencia en media:

Corolario 2.17. *Sean $\alpha, \beta > -1$, $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ en $[-1,1]$ y S_n el operador suma parcial enésima del desarrollo de Fourier con respecto a la medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$. Sea $1 < p < \infty$. Si se verifican las desigualdades*

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \le \frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \le \frac{1}{4},$$

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|S_n(\chi_E)\|_{L^p_*(w)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(w)} \ \forall n, \ \forall E \text{ medible.}$$

§2. Comportamiento débil de las series de Bessel

El segundo sistema ortogonal que vamos a considerar es el de Bessel, $\{j_n\}$, descrito en el primer capítulo. Según vimos, se trata, como el de Jacobi, de un sistema ortogonal sobre un intervalo compacto (en este caso, $[0,1]$); la medida con respecto a la que es un sistema ortogonal es $x\,dx$. Pero, a diferencia del de Jacobi, no está constituido por polinomios. Las expresiones necesarias para el estudio de la convergencia en media, en particular la descomposición de Pollard del núcleo, no se deducen entonces de una teoría general, sino que fueron obtenidas de forma particular por Wing ([Wi]) y Benedek y Panzone ([BP 1]).

Otra de las muchas propiedades de que no disponemos, en principio, es el teorema 1.11, de Máté, Nevai y Totik, a partir del cual se deducen condiciones necesarias para la convergencia en media y para la débil, como vimos en el apartado anterior. Por fortuna, también esto ha sido obtenido de manera particular para el sistema de Bessel, por Varona ([V], teorema 5.15), en un resultado que puede formularse de la siguiente manera (a partir de ahora, mientras no se indique lo contrario, todas las integrales se consideran sobre el intervalo $(0,1)$):

Lema 2.18. *Sea $\alpha > -1$ y J_α la función de Bessel de orden α. Sean $1 \le p < +\infty$, g una función medible y $\{r_n\}$ una sucesión de términos no negativos, con $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$. Entonces:*

$$\|x^{-1/2}\|_{L^p(|g|^p\,dx)} \le C \varliminf_{n\to\infty} \|r_n^{1/2} J_\alpha(r_n x)\|_{L^p(|g|^p\,dx)},$$

donde C es una constante que no depende de g ni de $\{r_n\}$.

Observación 2.19. En la demostración del citado teorema 5.15 de [V] se prueba la desigualdad anterior cuando $r_n = \alpha_n$, siendo $\{\alpha_n\}$ los ceros de J_α en orden creciente. Pero la única propiedad que se utiliza de $\{\alpha_n\}$ es que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

Mediante el uso de la teoría de pesos A_p, por un lado, y de este lema, por otro, Varona encontró (véase [V], cap. V) condiciones suficientes y necesarias para la acotación

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p x\,dx)} \le C\|f\|_{L^p(v^p x\,dx)},$$

donde

$$u(x) = x^a(1-x)^b \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{b_k}, \qquad v(x) = x^A(1-x)^B \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{B_k},$$

con $0 < x_1 < \ldots < x_m < 1$, $A \le a$, $B \le b$, $B_k \le b_k$ y $1 < p < \infty$, y donde S_n es la suma parcial enésima de la serie de Fourier con respecto al sistema de Bessel $\{j_n\}$ de orden α.

Esas condiciones son, como ya vimos en el primer capítulo:

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{a}{4}+\frac{A}{4}\right| < \frac{a-A}{4}+\text{mín}\{\frac{1}{4},\frac{\alpha+1}{2}\},$$

$$pb>-1,\ pB<p-1,\ pb_k>-1,\ pB_k<p-1\ \forall k.$$

El intervalo de acotación en media es, por lo tanto, abierto y podemos plantear de nuevo el problema de la acotación débil, con un peso, en los extremos de dicho intervalo. Aunque el resultado anterior es válido para cualquier $\alpha > -1$, nos limitaremos a partir de ahora al caso $\alpha \geq -1/2$, debido a que entonces las funciones de Bessel admiten la cota $|J_\alpha(x)| \leq Cx^{-1/2}$ $\forall x > 0$ (recordemos que $j_n(x) = 2^{1/2}|J_{\alpha+1}(\alpha_n)|^{-1}J_\alpha(\alpha_n x)$, donde $\{\alpha_n\}$ son los ceros de J_α en orden creciente). Supondremos también desde ahora que u es un peso que viene dado por:

$$u(x) = x^a(1-x)^b\prod_{k=1}^{m}|x-x_k|^{b_k},\ \text{con } 0<x_1<\ldots<x_m<1. \tag{2.28}$$

De esta manera, $\text{mín}\{1/4,(\alpha+1)/2\} = 1/4$ y las condiciones para

$$\|S_nf\|_{L^p(u^px\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^px\,dx)}$$

son:

$$\frac{1}{p}<\frac{3}{4}-\frac{a}{2},\qquad \frac{1}{p}<1-b,\qquad \frac{1}{p}<1-b_k\quad\forall k;$$
$$\frac{1}{p}>\frac{1}{4}-\frac{a}{2},\qquad \frac{1}{p}>-b,\qquad \frac{1}{p}>-b_k\quad\forall k.$$

Vamos a demostrar que estas desigualdades son necesarias también para la acotación débil. El procedimiento es similar al utilizado para las series de Jacobi en la primera parte de este capítulo: suponiendo que alguna de las desigualdades no es estricta, descompondremos cada operador S_n en suma de varios, aprovechando la citada expresión del núcleo de Wing y Benedek-Panzone; de estos sumandos, probaremos, siguiendo las demostraciones empleadas para la acotación fuerte, que todos menos uno están débilmente acotados uniformemente en n; finalmente, veremos que el restante operador no está uniformemente acotado. Para ello, necesitaremos el siguiente lema, versión débil del lema 2.18 y que se deduce de él como el lema 2.3 del teorema 1.11:

Lema 2.20. *Sea $\alpha > -1$ y J_α la función de Bessel de orden α. Sean $1 \leq p < +\infty$, g y h funciones medibles y $\{r_n\}$ una sucesión de términos no negativos, con $\text{lím}_{n\to\infty} r_n = +\infty$. Entonces:*

$$\|hx^{-1/2}\|_{L^p_*(|g|^p\,dx)} \leq C\varliminf_{n\to\infty}\|hr_n^{1/2}J_\alpha(r_nx)\|_{L^p_*(|g|^p\,dx)},$$

donde C es una constante que no depende de g y h ni de $\{r_n\}$.

Un primer resultado es:

Proposición 2.21. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y u un peso del tipo (2.28). Si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|S_n f\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f,\ \forall n,$$

entonces se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{p} < \frac{3}{4} - \frac{a}{2}, \qquad \frac{1}{p} < 1 - b, \qquad \frac{1}{p} < 1 - b_k \quad \forall k; \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{4} - \frac{a}{2}, \qquad \frac{1}{p} > -b, \qquad \frac{1}{p} > -b_k \quad \forall k. \tag{2.30}$$

Demostración:
Podemos repetir la demostración del lema 2.1 para nuestro sistema de Bessel (en realidad, es válido para cualquier sistema ortonormal: no es necesario que esté formado por polinomios) y concluir que la acotación débil implica:

$$\|j_n\|_{L^q(u^{-q}x\,dx)}\|j_n\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\ \forall n \geq 0,$$

donde, como siempre, $1/q + 1/p = 1$. Si ahora tenemos en cuenta que, de acuerdo con (1.31),

$$j_n(x) = C_n J_\alpha(\alpha_n x),\ \text{donde}\ \lim_{n\to\infty} C_n/[(\pi\alpha_n)^{1/2}] = 1,$$

entonces se sigue que

$$\|\alpha_n^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x)\|_{L^q(u^{-q}x\,dx)}\|\alpha_n^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x)\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\ \forall n \geq 0.$$

Podemos aplicar a esta desigualdad los lemas 2.18 y 2.20, puesto que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. Entonces, tomando límites inferiores, deducimos que

$$\|x^{-1/2}\|_{L^q(u^{-q}x\,dx)}\|x^{-1/2}\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C,$$

es decir:

$$x^{-1/2} \in L^q(u^{-q}x\,dx)$$

y

$$x^{-1/2} \in L^p_*(u^p x\,dx).$$

La primera de estas condiciones equivale, según (2.28), a:

$$-q/2 - aq + 1 > -1;\ -bq > -1;\ -b_k q > -1\ \forall k. \tag{2.31}$$

Y la segunda, de acuerdo también con el lema 2.7, a:

$$-p/2 + ap + 1 \geq -1;\; bp > -1;\; b_k p > -1\ \forall k. \tag{2.32}$$

Las dos desigualdades estrictas se deben a que

$$x^{-1/2} \in L^p_*(u^p x\, dx) \Rightarrow 1 \in L^p_*(u^p x\, dx) \Leftrightarrow 1 \in L^p(u^p x\, dx).$$

Examinemos (2.31):

$$-q/2 - aq + 1 > -1 \Leftrightarrow -1/2 - a > -2(1 - 1/p) \Leftrightarrow 1/p < 3/4 - a/2.$$

$$-bq > -1 \Leftrightarrow -b > 1/p - 1 \Leftrightarrow 1/p < 1 - b;$$

y lo mismo con b_k.
Luego se cumple (2.29). Las desigualdades (2.30) se deducen de (2.32), con lo que la proposición está probada.

Lo que nos queda por ver es que si se tiene la acotación $\|S_n f\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\, dx)}$ $\forall f$, $\forall n$ y, por lo tanto, se verifican (2.29) y (2.30), no puede darse la igualdad $1/p = 1/4 - a/2$. Para ello tenemos que descomponer adecuadamente los operadores S_n. Como vimos en el primer capítulo,

$$S_n f(x) = \int_0^1 K_n(x, y) f(y) y\, dy,$$

con

$$K_n(x, y) = J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(y - x)} + J_\alpha(M_n y) J_{\alpha+1}(M_n x) \frac{M_n}{2(x - y)} +$$

$$+ J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(y + x)} + J_\alpha(M_n y) J_{\alpha+1}(M_n x) \frac{M_n}{2(x + y)} + \mathcal{O}(1) \frac{(xy)^{-1/2}}{2 - x - y} +$$

$$+ \mathcal{O}(1)(xy)^\alpha = \frac{M_n J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) y}{y^2 - x^2} + \frac{M_n J_\alpha(M_n y) J_{\alpha+1}(M_n x) x}{x^2 - y^2} +$$

$$+ \mathcal{O}(1) \frac{(xy)^{-1/2}}{2 - x - y} + \mathcal{O}(1)(xy)^\alpha.$$

Además, $M_n \longrightarrow +\infty$. Definamos los cuatro operadores:

$$W_{1,n} f(x) = \int_0^1 \frac{M_n J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) y}{y^2 - x^2} f(y) y\, dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{M_n J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) y^2}{y^2 - x^2} f(y)\, dy,$$

$$W_{2,n}f(x) = \int_0^1 \frac{M_n J_\alpha(M_n y) J_{\alpha+1}(M_n x) xy}{x^2 - y^2} f(y)\, dy;$$
$$W_3 f(x) = \int_0^1 \frac{(xy)^{-1/2}}{2 - x - y} f(y) y\, dy = \int_0^1 \frac{x^{-1/2} y^{1/2}}{2 - x - y} f(y)\, dy;$$
$$W_4 f(x) = \int_0^1 (xy)^\alpha f(y) y\, dy = \int_0^1 x^\alpha y^{\alpha+1} f(y)\, dy.$$

Entonces, $S_n f = W_{1,n} f + W_{2,n} f + \mathcal{O}(1) W_3 f + \mathcal{O}(1) W_4 f$. Bastará ver que con las hipótesis (2.29) y (2.30), $W_{2,n}$, W_3 y W_4 están uniformemente acotados débilmente, pero que los operadores $W_{1,n}$ no lo están si $1/p = 1/4 - a/2$. Usaremos repetidamente las siguientes equivalencias, que hemos comprobado en el transcurso de la última demostración:

$$x^{-1/2} \in L^q(u^{-q} x\, dx) \Leftrightarrow (2.29); \tag{2.33}$$

$$x^{-1/2} \in L^p_*(u^p x\, dx) \Leftrightarrow (2.30). \tag{2.34}$$

Empezamos por W_4:

Proposición 2.22. *Si $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y se cumplen (2.29) y (2.30), entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|W_4 f\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} \leq C \|f\|_{L^p(u^p x\, dx)} \ \forall f.$$

Demostración:
$$W_4 f(x) = \int_0^1 x^\alpha y^{\alpha+1} f(y)\, dy = x^\alpha \int_0^1 y^\alpha f(y) y\, dy.$$

Por la desigualdad de Hölder,

$$\left| \int_0^1 y^\alpha f(y) y\, dy \right| \leq \|f\|_{L^p(u^p y\, dy)} \|y^\alpha\|_{L^q(u^{-q} y\, dy)}.$$

Como $\alpha \geq -1/2$, $\|y^\alpha\|_{L^q(u^{-q} y\, dy)} \leq \|y^{-1/2}\|_{L^q(u^{-q} y\, dy)} < \infty$, en virtud de (2.33). Luego
$$\|W_4 f\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} \leq C \|f\|_{L^p(u^p x\, dx)} \|x^\alpha\|_{L^p_*(u^p x\, dx)}.$$

Asimismo, por (2.34), $\|x^\alpha\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} \leq \|x^{-1/2}\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} < \infty$ y, como queríamos probar,
$$\|W_4 f\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} \leq C \|f\|_{L^p(u^p x\, dx)}.$$

Para estudiar el sumando W_3 necesitamos el siguiente resultado (véase [V], lema 5.2) sobre el operador similar a la transformada de Hilbert que aparece en su definición:

Lema 2.23. *Sean U y V dos pesos en $(0,1)$, $1 < p < \infty$. Para que el operador $Jf(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{2-x-y}\,dy$ esté acotado de $L^p((0,1), V\,dx)$ en $L^p((0,1), U\,dx)$, basta con que, para algún $d \in (0,1)$ y algún $\delta > 1$,*

a) $(U,V) \in A_p^\delta(d,1)$

b) $\int_0^d U(x)^\delta\,dx < \infty$, $\int_0^d V(x)^{-\delta/(p-1)}\,dx < \infty$.

Proposición 2.24. *Si $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y se cumplen (2.29) y (2.30), entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|W_3 f\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f.$$

Demostración:
Si J es el operador del lema,

$$W_3 f(x) = \int_0^1 \frac{x^{-1/2}y^{1/2}}{2-x-y} f(y)\,dy = x^{-1/2}J(y^{1/2}f(y), x),$$

así que

$$\|W_3 f\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x^{-1/2}J(y^{1/2}f(y), x)\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x^{-1/2}Jg\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|x^{-1/2}g\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall g;$$

basta ahora demostrar que, para algún $d \in (0,1)$,

$$\|x^{-1/2}\chi_{(0,d)}Jg\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|x^{-1/2}g\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall g, \tag{2.35}$$

$$\|x^{-1/2}\chi_{(d,1)}Jg\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|x^{-1/2}g\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall g. \tag{2.36}$$

Comencemos por (2.35). Sea $d \in (0,1)$; $0 < x < d$, $0 < y < 1 \Rightarrow 2-x-y > 1-d$, luego

$$0 < x < d \Rightarrow |Jg(x)| = \left|\int_0^1 \frac{g(y)}{2-x-y}\,dy\right| \leq \frac{1}{1-d}\int_0^1 |g(y)|dy.$$

Por tanto,

$$\|x^{-1/2}\chi_{(0,d)}Jg\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|g\|_{L^1(dx)}\|x^{-1/2}\chi_{(0,d)}\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq$$

$$\leq C\|g\|_{L^1(dx)}\|x^{-1/2}\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|g\|_{L^1(dx)},$$

esta última desigualdad, por (2.34). Aplicando ahora Hölder y (2.33):

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1(dx)} &= \|(x^{-1/2}ug)(x^{-1/2}u^{-1})\|_{L^1(x\,dx)} \leq \\ &\leq \|x^{-1/2}ug\|_{L^p(x\,dx)}\|x^{-1/2}u^{-1}\|_{L^q(x\,dx)} = \\ &= \|x^{-1/2}g\|_{L^p(u^p x\,dx)}\|x^{-1/2}\|_{L^q(u^{-q}x\,dx)} = C\|x^{-1/2}g\|_{L^p(u^p x\,dx)},\end{aligned}$$

de manera que se cumple (2.35). Falta ver (2.36). Como $x \sim 1$ en $(d,1)$,

$$\begin{aligned}\|x^{-1/2}\chi_{(d,1)}Jg\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} &\leq C\|x^{-1/2}\chi_{(d,1)}Jg\|_{L^p(u^p x\,dx)} \leq \\ &\leq C\|Jg\|_{L^p(u^p\chi_{(d,1)}\,dx)},\end{aligned}$$

luego para (2.36) basta con $\|Jg\|_{L^p(u^p\chi_{(d,1)}\,dx)} \leq C\|g\|_{L^p(u^p x^{1-p/2}\,dx)}$ $\forall g$.
Por el lema 2.23, para esto es suficiente con que, para algún $\delta > 1$,

a) $(u^p\chi_{(d,1)}, u^p x^{1-p/2}) \in A_p^\delta(d,1)$

b) $\int_0^d u^{p\delta}\chi_{(d,1)}\,dx < \infty$, $\int_0^d (u^p x^{1-p/2})^{-\delta/(p-1)}\,dx < \infty$.

De b), la primera condición se cumple trivialmente; en cuanto a la segunda:

$$\int_0^d (u^p x^{1-p/2})^{-\delta/(p-1)}\,dx = \int_0^d (u^{-q}x^{1-q/2})^\delta\,dx,$$

porque $q = p/(p-1)$ y $(1-p/2)(-1/(p-1)) = (1/p-1/2)(-p/(p-1)) = (1/2-1/q)(-q) = 1-q/2$. Por ser u de la forma (2.28), existe un $\delta > 1$ tal que

$$\int_0^d (u^{-q}x^{1-q/2})^\delta\,dx < \infty$$

si y sólo si

$$\int_0^d u^{-q}x^{1-q/2}\,dx < \infty,$$

lo que es cierto, por (2.33). Sólo tenemos ya que comprobar que se cumple la condición a). Puesto que $x \sim 1$ en $(d,1)$, a) equivale a $u^{p\delta} \in A_p(d,1)$; lo cual, a su vez, equivale simplemente a la integrabilidad en $(d,1)$ de $u^{p\delta}$ y de $u^{-q\delta}$, según vimos en el primer capítulo (teoremas 1.36 y 1.39), por ser u de la forma (2.28). Finalmente,

$$\int_d^1 u^{p\delta}\,dx < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} bp\delta > -1 \\ b_k p\delta > -1\ \forall k \end{cases} ;$$

$$\int_d^1 u^{-q\delta}\,dx < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} -bq\delta > -1 \\ -b_k q\delta > -1\ \forall k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b\delta > 1/p-1 \\ -b_k\delta > 1/p-1\ \forall k \end{cases} .$$

Estas desigualdades son posibles para algún $\delta > 1$ si y sólo si $bp > -1$, $b_k p > -1$, $-b > 1/p-1$ y $-b_k > 1/p-1$, lo que es cierto por las hipótesis (2.29) y (2.30). Por lo tanto, se cumplen a) y b), luego también (2.36), que, junto con (2.35), demuestra la proposición.

Consideremos ahora los operadores $W_{2,n}$. En su definición aparece claramente la transformada de Hilbert; haciendo uso de la teoría de pesos A_p, vamos a probar que están uniformemente acotados:

Proposición 2.25. *Si $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y se cumplen (2.29) y (2.30), entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|W_{2,n}f\|_{L^p(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f,\ \forall n.$$

Demostración:
Haciendo el cambio $t = y^2$ en la definición de $W_{2,n}$:

$$W_{2,n}f(x) = \int_0^1 \frac{M_n J_\alpha(M_n y) J_{\alpha+1}(M_n x) xy}{x^2 - y^2} f(y)\,dy,$$

se sigue:

$$W_{2,n}f(x) = \int_0^1 \frac{M_n J_\alpha(M_n t^{1/2}) J_{\alpha+1}(M_n x) x}{x^2 - t} f(t^{1/2}) \frac{1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} M_n^{1/2} J_{\alpha+1}(M_n x) x H(M_n^{1/2} J_\alpha(M_n t^{1/2}) f(t^{1/2}), x^2),$$

donde H es la transformada de Hilbert sobre el intervalo $(0,1)$. Luego:

$$\|W_{2,n}f\|_{L^p(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f,\ \forall n \Leftrightarrow$$

(haciendo el cambio $y = x^2$)

$$\Leftrightarrow \|W_{2,n}(f, y^{1/2})\|_{L^p(u(y^{1/2})^p\,dy)} \leq C\|f(y^{1/2})\|_{L^p(u(y^{1/2})^p\,dy)}\ \forall f,\ \forall n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|M_n^{1/2} J_{\alpha+1}(M_n y^{1/2}) y^{1/2} H(M_n^{1/2} J_\alpha(M_n t^{1/2}) f(t^{1/2}), y)\|_{L^p(u(y^{1/2})^p\,dy)} \leq$$

$$\leq C\|f(y^{1/2})\|_{L^p(u(y^{1/2})^p\,dy)}\ \forall f,\ \forall n \Leftrightarrow$$

(cambiando $g(y) = M_n^{1/2} J_\alpha(M_n y^{1/2}) f(y^{1/2})$)

$$\Leftrightarrow \|M_n^{1/2} J_{\alpha+1}(M_n y^{1/2}) y^{1/2} Hg(y)\|_{L^p(u(y^{1/2})^p\,dy)} \leq$$

$$\leq C\|M_n^{-1/2} J_\alpha(M_n y^{1/2})^{-1} g(y)\|_{L^p(u(y^{1/2})^p\,dy)}\ \forall g,\ \forall n.$$

Ahora bien, si $\alpha \geq -1/2$, $J_{\alpha+1}(z) = \mathcal{O}(z^{-1/2})$, así que:

$$|M_n^{1/2} J_{\alpha+1}(M_n y^{1/2}) y^{1/2}| \leq C M_n^{1/2} (M_n y^{1/2})^{-1/2} y^{1/2} = C y^{1/4};$$

$$|M_n^{-1/2} J_\alpha(M_n y^{1/2})^{-1}| \geq C M_n^{-1/2} (M_n y^{1/2})^{1/2} = C y^{1/4}.$$

Por lo tanto, para la última acotación basta con tener:

$$\|x^{1/4}Hg\|_{L^p(u(x^{1/2})^p\,dx)} \leq C\|x^{1/4}g\|_{L^p(u(x^{1/2})^p\,dx)},$$

es decir:

$$\|Hg\|_{L^p(u(x^{1/2})^p x^{p/4}\,dx)} \leq C\|g\|_{L^p(u(x^{1/2})^p x^{p/4}\,dx)},$$

que es una acotación de la transformada de Hilbert con un peso. Se cumplirá si el peso está en la clase A_p; pero antes simplifiquemos la expresión del peso. Partimos de la fórmula (2.28):

$$u(x) = x^a(1-x)^b\prod_{k=1}^{m}|x-x_k|^{b_k}.$$

En nuestro peso aparecerán factores $1-x^{1/2}$ y $|x^{1/2}-x_k|$. Pero:

$$1-x^{1/2} = \frac{1-x}{1+x^{1/2}} \sim 1-x$$

y

$$|x^{1/2}-x_k| = \frac{|x-x_k^2|}{|x^{1/2}+x_k|} \sim |x-x_k^2|,$$

luego

$$u(x^{1/2})^p x^{p/4} \sim x^{pa/2+p/4}(1-x)^{pb}\prod_{k=1}^{m}|x-x_k^2|^{pb_k}$$

y todo lo que hay que comprobar es que

$$x^{pa/2+p/4}(1-x)^{pb}\prod_{k=1}^{m}|x-x_k^2|^{pb_k} \in A_p.$$

Pero eso, como hemos visto en el primer capítulo (teoremas 1.36 y 1.39), es lo mismo que:

$$-1 < pa/2+p/4 < p-1,$$

$$-1 < pb < p-1$$

y

$$-1 < pb_k < p-1\ \forall k.$$

Es una simple comprobación ver que estas desigualdades se cumplen, por (2.29) y (2.30):

$$-1 < pa/2+p/4 \Leftrightarrow 1/p > -1/4-a/2 \Leftarrow (2.30);$$

$$pa/2+p/4 < p-1 \Leftrightarrow 1 < p(3/4-a/2) \Leftarrow (2.29);$$

$$-1 < pb \Leftrightarrow 1/p > -b \Leftarrow (2.30),$$

y lo mismo con b_k $\forall k$;

$$pb < p - 1 \Leftrightarrow 1 < p(1-b) \Leftarrow (2.29),$$

y lo mismo con b_k $\forall k$.
De esta forma, la proposición está demostrada.

Hasta ahora hemos visto que, si se cumplen (2.29) y (2.30), entonces están débilmente acotados uniformemente tres de los cuatro sumandos en que descomponíamos los operadores S_n. Para demostrar que los S_n no están débilmente acotados uniformemente si en (2.30) $1/p = 1/4 - a/2$, hay que ver que no lo están los operadores $W_{1,n}$.

Proposición 2.26. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y u un peso de la forma (2.28). Si se cumplen (2.29) y (2.30) y $1/p = 1/4 - a/2$, entonces no existe ninguna constante $C > 0$ tal que*

$$\|W_{1,n} f\|_{L^p_*(u^p x\, dx)} \leq C \|f\|_{L^p(u^p x\, dx)} \ \forall f, \ \forall n.$$

Demostración:
De acuerdo con la definición,

$$W_{1,n} f(x) = \int_0^1 \frac{M_n J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) y^2}{y^2 - x^2} f(y)\, dy =$$

$$= M_n^{1/2} J_\alpha(M_n x) \int_0^1 \frac{M_n^{1/2} J_{\alpha+1}(M_n y) y^2 f(y)}{y^2 - x^2}\, dy.$$

Sean ahora $0 \leq d \leq 1$ y $f(x) = \chi_{(d,1)}(x) \operatorname{sgn}(J_{\alpha+1}(M_n x)) |g(x)| x^{-1/2}$, donde sgn es la función signo y g es una función medible que más adelante concretaremos.

$$0 \leq x \leq d \leq y \Rightarrow \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{y^2 - x^2},$$

luego

$$0 \leq x \leq d \Rightarrow |W_{1,n} f(x)| =$$

$$= M_n^{1/2} |J_\alpha(M_n x)| \int_d^1 \frac{M_n^{1/2} |J_{\alpha+1}(M_n y)| y^{3/2} |g(y)|}{y^2 - x^2}\, dy \geq$$

$$\geq M_n^{1/2} |J_\alpha(M_n x)| \int_d^1 M_n^{1/2} |J_{\alpha+1}(M_n y)| y^{-1/2} |g(y)|\, dy,$$

por lo que:

$$|W_{1,n}f(x)| \geq \left(\int_d^1 M_n^{1/2}|J_{\alpha+1}(M_n y)|y^{-1/2}|g(y)|\,dy\right) M_n^{1/2}|J_\alpha(M_n x)|\chi_{(0,d)}(x).$$

Entonces:

$$\|W_{1,n}f\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall n \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_d^1 M_n^{1/2}|J_{\alpha+1}(M_n y)|y^{-1/2}|g(y)|\,dy\right) \|M_n^{1/2}J_\alpha(M_n x)\chi_{(0,d)}\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)} = C\|\chi_{(d,1)}g x^{-1/2}\|_{L^p(u^p x\,dx)},$$

donde aquí la constante C es la misma de la hipótesis y por consiguiente no depende de g ni de d. Como $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$, podemos aplicar los lemas 2.18 y 2.20 al primer miembro de la desigualdad y obtenemos, tomando límites inferiores:

$$\left(\int_d^1 y^{-1}|g(y)|\,dy\right) \|x^{-1/2}\chi_{(0,d)}\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|\chi_{(d,1)}g x^{-1/2}\|_{L^p(u^p x\,dx)},$$

donde la constante C no depende de g ni de d.

Tomemos ahora $0 < d < r < x_1$, de tal manera que en $(0,r)$ el peso u, que es de la forma (2.28), es del orden de x^a: $u(x) \sim x^a$ en $(0,r)$. Por hipótesis, $1/p = 1/4 - a/2$. Tomemos $g = \chi_{(d,r)}$. Entonces:

a) $\int_d^1 y^{-1}|g(y)|\,dy = \int_d^r y^{-1}\,dy = \log\frac{r}{d}$;

b) por el lema 2.7, $\|x^{-1/2}\chi_{(0,d)}\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \sim \|x^{-1/2}\chi_{(0,d)}\|_{L^p_*(x^{ap+1}\,dx)} = K$, independiente de d, ya que $-p/2 + (ap+1) + 1 = 2p(-1/4 + a/2 + 1/p) = 0$;

c) $\|\chi_{(d,1)}g x^{-1/2}\|^p_{L^p(u^p x\,dx)} \sim \int_d^r x^{-p/2+ap+1}\,dx = \int_d^r x^{-1}\,dx = \log\frac{r}{d}$.

Luego, de ser cierta la anterior acotación, también lo sería esta:

$$\log\frac{r}{d} \leq C(\log\frac{r}{d})^{1/p}.$$

Y esta es falsa, sin más que hacer $d \longrightarrow 0^+$. Esto demuestra la proposición.

Una vez que hemos estudiado la acotación de cada uno de los operadores W_i, obtenemos el resultado sobre la acotación débil para las series de Bessel:

Teorema 2.27. *Sea $\alpha \geq -1/2$, S_n la suma parcial enésima de la serie de Bessel de orden α, $1 < p < \infty$ y u un peso de la forma (2.28). Si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|S_n f\|_{L^p_*(u^p x\,dx)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p x\,dx)}\ \forall f,\ \forall n,$$

entonces se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{p} < \frac{3}{4} - \frac{a}{2}, \qquad \frac{1}{p} < 1 - b, \qquad \frac{1}{p} < 1 - b_k \quad \forall k;$$

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{4} - \frac{a}{2}, \qquad \frac{1}{p} > -b, \qquad \frac{1}{p} > -b_k \quad \forall k.$$

Demostración:
No hay más que reunir las proposiciones 2.21, 2.22, 2.24, 2.25 y 2.26.

CAPÍTULO III
Modificaciones de medidas por deltas de Dirac
§1. Caso general

Sea $d\mu$ una medida positiva y de Borel sobre $\mathbb{R}$ con infinitos puntos de crecimiento y tal que $\forall n \geq 0\ \exists \int_{\mathbb{R}} x^n \, d\mu(x)$. Con estas condiciones, existen la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios ortonormales y la $\{K_n\}$ de núcleos correspondientes a $d\mu$. Por k_n denotaremos el coeficiente director del polinomio P_n: $P_n(x) = k_n x^n + \dots$, con $k_n > 0$.

Generalmente, han sido estudiadas medidas sin parte singular, es decir, pesos: $d\mu(x) = w(x)\,dx$. Es el caso de los polinomios clásicos (Jacobi, Laguerre, Hermite), de los polinomios de Jacobi generalizados ([B], [V], [Nv]) y los pesos de Freud, entre otros.

Por otro lado, gran parte de los resultados sobre acotación de los polinomios ortonormales, convergencia en L^p o $L^{p,\infty}$ de la serie de Fourier o propiedades asintóticas dependen sólo de la parte absolutamente continua de la medida (véase [MNT 1], [MNT 2], [R 1], [R 2], [V], lema 3.1, o el capítulo anterior, por ejemplo). Puede uno preguntarse por el papel que desempeña la parte singular; o, en otros términos, comparar las propiedades de los polinomios ortogonales asociados a dos medidas con la misma parte absolutamente continua. A lo largo de este capítulo estudiaremos el caso más sencillo: modificaciones de medidas por deltas de Dirac; es decir, medidas del tipo $d\mu + M\delta_a$, donde M es una constante positiva y δ_a indica la delta de Dirac en el punto a: $\int_{\mathbb{R}} f\delta_a = f(a)\ \forall f$.

En el caso de $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$ y $a = \pm 1$, los polinomios ortogonales con respecto a $d\mu + M\delta_a$ se pueden expresar en función de los correspondientes a $d\mu$, $(1-x)\,d\mu$, $(1+x)\,d\mu$ o $(1-x)(1+x)\,d\mu$ (véase [K], por ejemplo) y de esta manera es posible encontrar acotaciones y estudiar el problema de la convergencia en media ([V], cap. IV). En el caso general, estas expresiones no son válidas, ya que $x-a$ puede no tener signo constante en el soporte de la medida y $(x-a)\,d\mu$ no será una medida positiva. Según veremos a continuación, una solución es considerar la medida $(x-a)^2\,d\mu$. Pueden verse resultados sobre este tipo de modificaciones en [Go], no sólo para medidas sobre $\mathbb{R}$, sino, en general, sobre curvas de Jordan.

Dada una medida $d\mu$ con una sucesión de polinomios ortonormales $\{P_n\}$, denotaremos mediante $\{P_n^a\}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $(x-a)^2\,d\mu(x)$. En general, denotaremos mediante $\{P_n^{a_1,a_2,\dots,a_k}\}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_k)^2\,d\mu(x)$. Idéntico convenio adoptaremos con los núcleos K_n, con las sumas parciales de la serie de Fourier, S_n, los coeficientes k_n, etcétera.

El siguiente lema proporciona una primera relación entre las sucesiones $\{K_n\}$, $\{P_n\}$ y $\{P_n^a\}$:

Lema 3.1. *Con la notación anterior,*

$$K_n(x,a) = \frac{k_n}{k_n^a} P_n(a) P_n^a(x) - \frac{k_{n-1}^a}{k_{n+1}} P_{n+1}(a) P_{n-1}^a(x) \ \forall n \geq 1.$$

Demostración:
Puesto que $K_n(x,a) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j^a(x)$, con $\alpha_j = \int_{\mathbb{R}} K_n(x,a) P_j^a(x)(x-a)^2 \, d\mu(x)$, sólo hay que comprobar:

a) $\alpha_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

b) $\alpha_{n-1} = -\frac{k_{n-1}^a}{k_{n+1}} P_{n+1}(a)$;

c) $\alpha_n = \frac{k_n}{k_n^a} P_n(a)$.

Los apartados a) y c) son inmediatos, a partir de las conocidas propiedades siguientes (proposiciones 1.6 y 1.9):

$$\int_{\mathbb{R}} R_n(x) K_n(x,a) \, d\mu(x) = R_n(a) \ \forall \text{ polinomio } R_n \text{ de grado } \leq n.$$

$$\int_{\mathbb{R}} R_n(x) P_n^a(x)(x-a)^2 \, d\mu(x) = r_n / k_n^a \ \forall \text{ polinomio } R_n = r_n x^n + \ldots$$

En cuanto a b), usando la fórmula de Christoffel-Darboux y que los polinomios P_n son ortonormales con respecto a $d\mu$, tenemos:

$$\alpha_{n-1} = \int_{\mathbb{R}} K_n(x,a) P_{n-1}^a(x)(x-a)^2 \, d\mu(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [K_n(x,a)(x-a)][P_{n-1}^a(x)(x-a)] \, d\mu(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{k_n}{k_{n+1}} [P_n(a) P_{n+1}(x) - P_{n+1}(a) P_n(x)][P_{n-1}^a(x)(x-a)] d\mu(x) =$$

$$= -\frac{k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(a) \int_{\mathbb{R}} P_n(x)[P_{n-1}^a(x)(x-a)] d\mu(x) =$$

$$= -\frac{k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(a) \frac{k_{n-1}^a}{k_n} = -\frac{k_{n-1}^a}{k_{n+1}} P_{n+1}(a),$$

como queríamos demostrar.

Con el objeto de encontrar acotaciones de los polinomios ortonormales y de los núcleos, es importante conocer la magnitud de los coeficientes que aparecen en las fórmulas que vamos a manejar. Frecuentemente, habrá que restringirse al caso de medidas de soporte compacto y parte absolutamente continua positiva en casi todo punto:

Lema 3.2. *Sea* $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$*,* $\mu' > 0$ *en casi todo punto. Sea* $a \in [-1,1]$*. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_n^a} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n-1}^a}{k_{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Demostración:
El primer límite es una consecuencia de un resultado de Máté, Nevai y Totik ([MNT 2], teorema 11), del que se deduce, bajo las hipótesis anteriores:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n^a}{k_n} = \exp\left(-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log(\cos t - a)^2\, dt\right);$$

no es difícil comprobar que esa integral vale $-4\pi \log 2$, $\forall a \in [-1,1]$.
El segundo límite se obtiene a partir del primero, ya que de las hipótesis se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{1}{2}$ (véase [R 1], pág. 212, o [MNT 2], teorema 10).

Lema 3.3. *Sea* $d\mu$ *sobre* $\mathbb{R}$ *y* $n \geq 1$*. Con la notación anterior, se tiene:*

$$\int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x)(x-a)\, d\mu(x) = -\frac{k_{n-1}^a}{k_n} \frac{P_n(a)}{K_{n-1}(a,a)}; \tag{3.1}$$

$$P_{n-1}^a(x)(x-a) = \frac{k_{n-1}^a}{k_n} P_n(x) - \frac{k_{n-1}^a}{k_n} \frac{P_n(a)}{K_{n-1}(a,a)} K_{n-1}(x,a). \tag{3.2}$$

Demostración:
Por ser un polinomio de grado n, podemos representar $P_{n-1}^a(x)(x-a)$ de la siguiente forma:

$$P_{n-1}^a(x)(x-a) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j(x).$$

Igualando los coeficientes directores, resulta $\alpha_n = \frac{k_{n-1}^a}{k_n}$; y por relaciones de ortogonalidad, para $j = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\alpha_j = \int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x)(x-a)P_j(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x) \frac{P_j(x) - P_j(a)}{x-a} (x-a)^2\, d\mu(x) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x) P_j(a)(x-a)\, d\mu(x).$$

Pero la primera de estas dos integrales es cero, ya que $\frac{P_j(x)-P_j(a)}{x-a}$ es un polinomio de grado $j-1 < n-1$ y los polinomios P_n^a son ortonormales con respecto a $(x-a)^2\,d\mu(x)$. Por lo tanto:

$$\alpha_j = P_j(a)\int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x)(x-a)\,d\mu(x) \qquad j=1,2,\dots,n-1.$$

Por último, $\alpha_0 = \int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x)(x-a)P_0\,d\mu(x) = P_0(a)\int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x)(x-a)\,d\mu(x)$, ya que P_0 es constante.
Es decir:

$$P_{n-1}^a(x)(x-a) = \frac{k_{n-1}^a}{k_n}P_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} P_j(a)\int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(u)(u-a)\,d\mu(u)P_j(x) =$$

$$= \frac{k_{n-1}^a}{k_n}P_n(x) + \left[\int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(u)(u-a)\,d\mu(u)\right]K_{n-1}(x,a).$$

Tomando ahora $x=a$, resulta (3.1); sustituyendo (3.1) en esta fórmula, se tiene (3.2).

Con los resultados anteriores podemos encontrar ya una expresión para los polinomios ortogonales con respecto a $d\mu + M\delta_a$ en función de los polinomios $\{P_n\}$ y $\{P_n^a\}$:

Proposición 3.4. *Sean $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a una medida $d\mu$ sobre $\mathbb{R}$ y $\{K_n\}$ la sucesión de los núcleos. Sea $a\in\mathbb{R}$; denotemos por $\{P_n^a\}$ la sucesión de polinomios relativos a $(x-a)^2\,d\mu(x)$. Si $M>0$ y $\{Q_n\}$ son los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu+M\delta_a$, entonces existen constantes $A_n, B_n \in (0,1)$ tales que*

$$Q_n(x) = A_nP_n(x) + B_n(x-a)P_{n-1}^a(x)\ \forall n\geq 1. \tag{3.3}$$

Además, si $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$, *$\mu'>0$ en casi todo punto y $a\in[-1,1]$, se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} A_nK_{n-1}(a,a) = \frac{1}{\lambda(a)+M}, \tag{3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{M}{\lambda(a)+M}, \tag{3.5}$$

donde $\lambda(a) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{K_n(a,a)} \in [0,+\infty)$.

Demostración:
Impongamos primero que $P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)$ sea ortogonal a los polinomios de grado menor que n, con respecto a $d\mu + M\delta_a$. Basta con que:
(3.6)
$$\int_{\mathbb{R}}[P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)](x-a)^j[d\mu(x)+M\delta_a(x)] = 0, \qquad j=0,1,\dots,n-1.$$

Sea $j \geq 1$;

$$\int_{\mathbb{R}}[P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)](x-a)^j[d\mu(x)+M\delta_a(x)] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}[P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)](x-a)^j d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} P_n(x)(x-a)^j d\mu(x) +$$

$$+ C_n \int_{\mathbb{R}} P^a_{n-1}(x)(x-a)^{j-1}[(x-a)^2\, d\mu(x)] = 0,$$

por ser $\{P_n\}$ y $\{P^a_n\}$ ortonormales con respecto a $d\mu$ y $(x-a)^2\, d\mu$, respectivamente. Luego sólo hace falta encontrar un C_n tal que se cumpla (3.6) para $j=0$. En este caso, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}}[P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)][d\mu(x)+M\delta_a(x)] = MP_n(a) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}}[P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)]d\mu(x) = MP_n(a) + C_n \int_{\mathbb{R}}(x-a)P^a_{n-1}(x)\, d\mu(x) =$$

$$= P_n(a)\left[M - C_n \frac{k^a_{n-1}}{k_n}\frac{1}{K_{n-1}(a,a)}\right],$$

de acuerdo con (3.1). Por consiguiente, tomando

$$C_n = M\frac{k_n}{k^a_{n-1}}K_{n-1}(a,a), \tag{3.7}$$

el polinomio $P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)$ es ortogonal a los polinomios de grado menor que n; como $C_n > 0$, se trata de un polinomio de grado n y coeficiente director positivo. Luego, dividiéndolo por su norma, obtendremos el polinomio ortonormal Q_n.

$$\|P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)\|^2_{L^2(d\mu+M\delta_a)} = MP_n(a)^2 +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}}[P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)]^2\, d\mu(x) = MP_n(a)^2 + \int_{\mathbb{R}} P_n(x)^2\, d\mu(x) +$$

$$+C_n^2 \int_{\mathbb{R}} P_{n-1}^a(x)^2 (x-a)^2 \, d\mu(x) + 2C_n \int_{\mathbb{R}} P_n(x)(x-a)P_{n-1}^a(x) \, d\mu(x) =$$

$$= MP_n(a)^2 + 1 + C_n^2 + 2C_n \frac{k_{n-1}^a}{k_n},$$

por las propiedades de ortonormalidad de los polinomios P_n y P_n^a. Sea:

$$D_n = \left[MP_n(a)^2 + 1 + C_n^2 + 2C_n \frac{k_{n-1}^a}{k_n} \right]^{1/2}; \tag{3.8}$$

entonces:

$$Q_n(x) = \frac{1}{D_n} P_n(x) + \frac{C_n}{D_n} (x-a) P_{n-1}^a(x),$$

es decir, (3.3); y como de (3.8) se sigue que $D_n > 1$ y $D_n > C_n$, resulta que $A_n, B_n \in (0,1)$, como queríamos demostrar, siendo

$$A_n = \frac{1}{D_n}, \qquad B_n = \frac{C_n}{D_n}. \tag{3.9}$$

Ahora supongamos que $\operatorname{sop} d\mu = [-1,1]$, $\mu' > 0$ y $a \in [-1,1]$. Con estas condiciones, en la relación de recurrencia

$$xP_n(x) = a_{n+1} P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_n P_{n-1}(x)$$

se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (teorema 1.8). Y por lo tanto (véase [Nv], teorema 3, pág. 26):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(x)^2}{K_{n-1}(x,x)} = 0 \ \forall x \in [-1,1].$$

Como $K_{n-1}(a,a) \geq P_0^2$, $\frac{P_n(a)^2}{K_{n-1}(a,a)^2} \leq C \frac{P_n(a)^2}{K_{n-1}(a,a)}$. Luego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(a)^2}{K_{n-1}(a,a)^2} = 0. \tag{3.10}$$

Por otro lado, de (3.9), (3.8) y (3.7) se sigue que:

$$\frac{1}{A_n K_{n-1}(a,a)} = \frac{D_n}{K_{n-1}(a,a)} =$$

$$= \left[M \frac{P_n(a)^2}{K_{n-1}(a,a)^2} + \frac{1}{K_{n-1}(a,a)^2} + \frac{C_n^2}{K_{n-1}(a,a)^2} + \frac{2C_n k_{n-1}^a}{k_n K_{n-1}(a,a)^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[M \frac{P_n(a)^2}{K_{n-1}(a,a)^2} + \frac{1}{K_{n-1}(a,a)^2} + M^2 \left(\frac{k_n}{k_{n-1}^a} \right)^2 + \frac{2M}{K_{n-1}(a,a)} \right]^{1/2}.$$

Por ser $\mu' > 0$ en casi todo punto en $[-1,1]$, $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 2$ (véase [R 1], pág. 212, o [MNT 2], teorema 10; k_n/k_{n+1} es el coeficiente a_{n+1} de la relación de recurrencia antes citada); del lema 3.2 se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n-1}^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_{n-1}^a}\frac{k_n}{k_{n+1}} = 1. \tag{3.11}$$

Llevando (3.10) y (3.11) a la fórmula anterior, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_n K_{n-1}(a,a)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[M\frac{P_n(a)^2}{K_{n-1}(a,a)^2} + \frac{1}{K_{n-1}(a,a)^2} + M^2\left(\frac{k_n}{k_{n-1}^a}\right)^2 + \frac{2M}{K_{n-1}(a,a)} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\lambda(a)^2 + M^2 + 2M\lambda(a)\right]^{1/2} = \lambda(a) + M,$$

es decir: (3.4). Y entonces, de (3.9), (3.7) y (3.11) se deduce (3.5):

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n M \frac{k_n}{k_{n-1}^a} K_{n-1}(a,a) = \frac{M}{\lambda(a)+M},$$

con lo que la proposición queda completamente demostrada.

Observación 3.5. Si $P_n(a) = 0$, debe ser $Q_n = P_n$, como se deduce de que, si R_n es un polinomio de grado menor o igual que n,

$$\int_{\mathbb{R}} P_n R_n [d\mu + M\delta_a] = \int_{\mathbb{R}} P_n R_n \, d\mu + M P_n(a) R_n(a) = \int_{\mathbb{R}} P_n R_n \, d\mu.$$

Esto no contradice la proposición 3.4, porque, en este caso,

$$P_n(x) = (x-a)P_{n-1}^a(x), \tag{3.12}$$

lo que puede demostrarse fácilmente, teniendo en cuenta que $(x-a)^{-1}P_n(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y, si R_{n-1} es otro polinomio de grado menor o igual que $n-1$,

$$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^{-1} P_n(x) R_{n-1}(x)(x-a)^2 \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} P_n(x) R_{n-1}(x)(x-a) d\mu(x).$$

En particular, $k_n = k_{n-1}^a$. En (3.8) se tiene entonces $D_n = 1 + C_n$ y sustituyendo (3.9) y (3.12) en (3.3) resulta $Q_n = P_n$.

A continuación, obtenemos unas relaciones entre los núcleos K_n y K_n^a y los correspondientes a $d\mu + M\delta_a$:

Proposición 3.6. *Sea $\{K_n\}$ la sucesión de núcleos de una medida $d\mu$ sobre $\mathbb{R}$ y sean $\{K_n^a\}$ y $\{L_n\}$ los núcleos de $(x-a)^2\,d\mu(x)$ y $d\mu + M\delta_a$, respectivamente, donde $a \in \mathbb{R}$ y $M > 0$. Entonces:*

$$(y-a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)(x-a)d\mu(x) = 1 - \frac{K_n(a,y)}{K_n(a,a)}; \tag{3.13}$$

$$(x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y) = K_n(x,y) - \frac{K_n(a,y)}{K_n(a,a)}K_n(x,a); \tag{3.14}$$

(3.15)
$$L_n(x,y) = \frac{1}{1+MK_n(a,a)}K_n(x,y) + \frac{MK_n(a,a)}{1+MK_n(a,a)}(x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y) =$$

$$= K_n(x,y) - \frac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)}K_n(x,a).$$

<u>Demostración</u>:
Es conocido que, por ser $\{K_n^a\}$ los núcleos relativos a la medida $(x-a)^2\,d\mu$, si R_n es un polinomio de grado menor o igual que n se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}} R_n(x)K_n^a(x,y)[(x-a)^2\,d\mu(x)] = R_n(y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Realmente, esta propiedad define los núcleos relativos a una medida cualquiera. Sean $\{P_n\}$ los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$. Si hacemos

$$(x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(y)P_j(x), \tag{3.17}$$

entonces $\forall j \geq 1$,

$$\alpha_j(y) = \int_{\mathbb{R}} (x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y)P_j(x)\,d\mu(x) =$$

$$= (y-a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)P_j(x)(x-a)\,d\mu(x) =$$

$$= (y-a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)\frac{P_j(x)-P_j(a)}{x-a}(x-a)^2\,d\mu(x) +$$

$$+(y-a)P_j(a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)(x-a)\,d\mu(x).$$

Pero como $\frac{P_j(x)-P_j(a)}{x-a}$ es un polinomio de grado $j-1 \leq n-1$, de (3.16) se sigue que:

$$\alpha_j(y) = P_j(y) - P_j(a) + (y-a)P_j(a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)(x-a)\,d\mu(x). \tag{3.18}$$

También α_0 responde a esta fórmula, ya que, por ser P_0 constante,

$$\alpha_0(y) = \int_{\mathbb{R}} (x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y)P_0(x)\,d\mu(x) =$$

$$= (y-a)P_0(a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)(x-a)\,d\mu(x) =$$

$$= P_0(y) - P_0(a) + (y-a)P_0(a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(x,y)(x-a)\,d\mu(x).$$

Sustituyendo (3.18) en (3.17), resulta:

$$(x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y) = \sum_{j=0}^{n} P_j(y)P_j(x) - \sum_{j=0}^{n} P_j(a)P_j(x) +$$

$$+(y-a)\sum_{j=0}^{n} P_j(a)P_j(x)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(u,y)(u-a)\,d\mu(u),$$

es decir:

$$(x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y) = K_n(x,y) - K_n(x,a) + \tag{3.19}$$

$$+(y-a)K_n(x,a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(u,y)(u-a)\,d\mu(u).$$

Haciendo $x = a$, resulta:

$$0 = K_n(a,y) - K_n(a,a) + (y-a)K_n(a,a)\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}^a(u,y)(u-a)\,d\mu(u);$$

de aquí se obtiene (3.13). Sustituyendo (3.13) en (3.19), sale (3.14). Y a partir de (3.14) se deduce la segunda igualdad de (3.15). Sólo hace falta demostrar, por ejemplo, que

$$L_n(x,y) = K_n(x,y) - \frac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)}K_n(x,a). \tag{3.20}$$

Para ello, podemos probar que el miembro de la derecha cumple la caracterización análoga a (3.16) de los núcleos L_n, es decir, que si R_n es un polinomio de grado menor o igual que n, se verifica:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[K_n(x,y) - \frac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)} K_n(x,a) \right] R_n(x)[d\mu(x) + M\delta_a(x)] = R_n(y). \tag{3.21}$$

Puesto que los núcleos K_n sí cumplen que $\int_{\mathbb{R}} K_n(x,y)R_n(x)\,d\mu(x) = R_n(y)$, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[K_n(x,y) - \frac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)} K_n(x,a) \right] R_n(x)[d\mu(x) + M\delta_a(x)] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} K_n(x,y)R_n(x)\,d\mu(x) - \frac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)} \int_{\mathbb{R}} K_n(x,a)R_n(x)\,d\mu(x) +$$

$$+MK_n(a,y)R_n(a) - \frac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)} MK_n(a,a)R_n(a) =$$

$$= R_n(y) - \tfrac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)} R_n(a) + MK_n(a,y)R_n(a) - \tfrac{MK_n(a,y)}{1+MK_n(a,a)} MK_n(a,a)R_n(a) =$$

$$= R_n(y),$$

luego (3.21) se cumple y por lo tanto (3.20) y (3.15), que es lo que faltaba por demostrar.

Corolario 3.7. *Sea $\{K_n\}$ la sucesión de núcleos de una medida $d\mu$ sobre $\mathbb{R}$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ y distintos, $M_1, M_2, \ldots, M_k > 0$ y $\{L_n\}$ los núcleos correspondientes a la medida $d\mu + \sum_{j=1}^k M_j \delta_{a_j}$.*
Para cada subconjunto $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}\}$ de $\{a_1, \ldots, a_k\}$, sean $\{K_n^{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}}\}$ los núcleos de $(x-a_{j_1})^2(x-a_{j_2})^2 \ldots (x-a_{j_r})^2\,d\mu(x)$ [incluye el caso $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}\} = \emptyset \longrightarrow \{K_n\}, d\mu$]. Entonces:

$$L_n(x,y) = \tag{3.22}$$

$$= \sum A_{n,j_1,\ldots,j_r}(x-a_{j_1})\ldots(x-a_{j_r})(y-a_{j_1})\ldots(y-a_{j_r})K_{n-r}^{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}(x,y),$$

donde el sumatorio lo es en los subconjuntos $\{j_1, \ldots, j_r\}$ de $\{1, \ldots, k\}$ y

$$\forall n \ \sum A_{n,j_1,\ldots,j_r} = 1, \ 0 < A_{n,j_1,\ldots,j_r} \ \forall j_1, \ldots, j_r. \tag{3.23}$$

Demostración:
Por inducción sobre el número k de deltas de Dirac, a partir de la primera igualdad de (3.15), que puede escribirse de forma más simple como:

$$L_n(x,y) = A_n K_n(x,y) + (1-A_n)(x-a)(y-a)K_{n-1}^a(x,y), \qquad 0 < A_n < 1, \tag{3.24}$$

siendo $\{L_n\}$ los núcleos de $d\mu + M\delta_a$. Por lo tanto, (3.22) y (3.23) son ciertas para $k = 1$. Supongamos que lo son para un $k-1$ y probémoslo para k.
Dada la medida $d\mu + \sum_{j=1}^{k} M_j\delta_{a_j}$, consideremos la medida $d\mu + \sum_{j=1}^{k-1} M_j\delta_{a_j}$ y denotemos por $\{J_n\}$ sus núcleos. La medida $d\mu + \sum_{j=1}^{k} M_j\delta_{a_j}$ se obtiene a partir de $d\mu + \sum_{j=1}^{k-1} M_j\delta_{a_j}$ añadiendo una delta de Dirac en a_k, luego es válida una expresión análoga a (3.24). En ella aparecerán los núcleos J_n y los núcleos $J_n^{a_k}$ de la medida

$$(x-a_k)^2\left(d\mu + \sum_{j=1}^{k-1} M_j\delta_{a_j}\right) = (x-a_k)^2\,d\mu + \sum_{j=1}^{k-1}(a_j-a_k)^2 M_j\delta_{a_j}.$$

Como esta se obtiene añadiendo a $(x-a_k)^2\,d\mu$ $k-1$ deltas de Dirac, sus núcleos satisfacen (3.22) y (3.23). Es decir:

$$J_n^{a_k}(x,y) =$$

$$= \sum A_{n,j_1,\dots,j_r}(x-a_{j_1})\dots(x-a_{j_r})(y-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})K_{n-r}^{a_k,a_{j_1},\dots,a_{j_r}}(x,y),$$

donde el sumatorio lo es en los subconjuntos $\{j_1,\dots,j_r\}$ de $\{1,\dots,k-1\}$,

$$\forall n\ \sum A_{n,j_1,\dots,j_r} = 1,\ 0 < A_{n,j_1,\dots,j_r}\ \forall j_1,\dots,j_r.$$

De la misma manera, para los núcleos J_n se obtiene:

$$J_n(x,y) =$$

$$= \sum B_{n,j_1,\dots,j_r}(x-a_{j_1})\dots(x-a_{j_r})(y-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})K_{n-r}^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}}(x,y),$$

donde el sumatorio lo es en los subconjuntos $\{j_1,\dots,j_r\}$ de $\{1,\dots,k-1\}$,

$$\forall n\ \sum B_{n,j_1,\dots,j_r} = 1,\ 0 < B_{n,j_1,\dots,j_r}\ \forall j_1,\dots,j_r.$$

Interpretando la fórmula (3.24) para los núcleos L_n de $d\mu + \sum_{j=1}^{k} M_j\delta_{a_j}$, resulta: para una constante C_n, con $0 < C_n < 1$,

$$L_n(x,y) = C_n J_n(x,y) + (1-C_n)(x-a_k)(y-a_k)J_{n-1}^{a_k}(x,y) =$$

$$= C_n \sum B_{n,j_1,\dots,j_r}(x-a_{j_1})\dots(x-a_{j_r})(y-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})K_{n-r}^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}}(x,y) +$$

$$+(1-C_n)(x-a_k)(y-a_k)\sum A_{n-1,j_1,\dots,j_r}(x-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})K_{n-r-1}^{a_k,a_{j_1},\dots,a_{j_r}}(x,y);$$

y es inmediato comprobar que esta expresión es (3.22) y (3.23). Por el principio de inducción, el corolario es cierto.

Estudiemos ahora la convergencia de la serie de Fourier relativa a una medida del tipo $d\mu + \sum_{j=1}^{k} M_j \delta_{a_j}$. Los resultados siguientes permitirán relacionar esta convergencia con la de las series relativas a las medidas $(x-a_{j_1})^2(x-a_{j_2})^2 \dots (x-a_{j_r})^2\, d\mu(x)$. El primero de ellos es:

Teorema 3.8. *Sea $d\mu$ una medida sobre $\mathbb{R}$ que admita una sucesión de polinomios ortonormales. Sean $a_i \in \mathbb{R}$, $M_i > 0$ $(i = 1, \dots, k)$ y $d\nu = d\mu + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta_{a_i}$. Sean también u_1, u_2 y v tres pesos, $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Supongamos que $\mu(\{a_i\}) = 0$, $u_1(a_i)u_2(a_i) < +\infty$, $0 < v(a_i)$ $\forall i$.*
Sean, por último, $\{L_n\}$ los núcleos con respecto a $d\nu$ y:

$$S_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} L_n(x,y) f(y) d\nu(y); \tag{3.25}$$

$$T_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} L_n(x,y) f(y)\, d\mu(y). \tag{3.26}$$

Entonces:

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\, d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\, d\nu)}\ \forall f \in L^p(v^p d\nu),\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|u_1 T_n f\|_{L^p_*(u_2^p\, d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\, d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\, d\mu)\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_1(a_i)u_2(a_i)\|L_n(x,a_i)\|_{L^q(v^{-q}\, d\mu)} \le C\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i, \\ \|u_1 L_n(x,a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\, d\mu)} \le C v(a_i)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i. \end{cases}$$

Y la misma equivalencia es cierta sustituyendo las normas débiles por normas fuertes. (La constante C no tiene por qué ser la misma en las cuatro desigualdades.)

Demostración:
Supongamos que $\|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\, d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\, d\nu)}$ $\forall f, n$. A partir de (3.25) y (3.26), se sigue:

$$S_n f(x) = T_n f(x) + \sum_{i=1}^{k} M_i L_n(x,a_i) f(a_i). \tag{3.27}$$

Dada f, definamos $g(x) = f(x)$ si $x \ne a_i$ $\forall i$, $g(a_i) = 0$ $\forall i$. Puesto que $\mu(\{a_i\}) = 0$, tenemos:

$$S_n g = T_n g = T_n f \quad \text{y} \quad \|g\|_{L^p(v^p\, d\nu)} = \|g\|_{L^p(v^p\, d\mu)} = \|f\|_{L^p(v^p\, d\mu)}.$$

Luego:

$$\|u_1 S_n g\|_{L^p_*(u_2^p\, d\nu)} \le C\|g\|_{L^p(v^p\, d\nu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u_1 T_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}. \tag{3.28}$$

Por otra parte, tomando $f = \chi_{\{a_i\}}$ resulta $S_n f(x) = M_i L_n(x, a_i)$; luego:

$$\|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} = M_i \|u_1 L_n(x, a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)}$$

y $\|f\|_{L^p(v^p\,d\nu)} = M_i^{1/p} v(a_i)$. Por lo tanto:

$$\|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\nu)} \Rightarrow \|u_1 L_n(x, a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C v(a_i).$$

De (3.28) y esto último, tenemos:

$$\|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\nu)}\ \forall f, n \Leftrightarrow \tag{3.29}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|u_1 T_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f\ \forall n, \\ \|u_1 L_n(x, a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C v(a_i)\ \forall n\ \forall i \end{cases}$$

(la implicación [$\Leftarrow$] se deduce de (3.27), teniendo en cuenta que

$$\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)},\ v(a_i)|f(a_i)| \leq \|f\|_{L^p(v^p\,d\nu)}).$$

La misma demostración sirve con normas fuertes.
Veamos la segunda condición de la derecha de (3.29):

$$\|u_1 L_n(x, a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} = \sup_{y>0} y^p \int_{u_1|L_n(x,a_i)|>y} u_2(x)^p d\nu(x) =$$

$$= \sup_{y>0} y^p \int_{u_1|L_n(x,a_i)|>y} [u_2^p\,d\mu + \sum_{j=1}^k u_2(a_j)^p M_j \delta_{a_j}] \leq$$

$$\leq \left(\sup_{y>0} y^p \int_{u_1|L_n(x,a_i)|>y} u_2^p\,d\mu\right) + \sum_{j=1}^k u_2(a_j)^p M_j \left(\sup_{y>0} y^p \int_{u_1|L_n(x,a_i)|>y} \delta_{a_j}\right),$$

es decir:

$$\|u_1 L_n(x, a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq \tag{3.30}$$

$$\leq \|u_1 L_n(x, a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} + \sum_{j=1}^k u_2(a_j)^p M_j u_1(a_j)^p |L_n(a_j, a_i)|^p.$$

Pero, por la desigualdad de Schwarz, $|L_n(a_j, a_i)| \leq L_n(a_i, a_i)^{1/2} L_n(a_j, a_j)^{1/2}$. Como la medida $d\nu = d\mu + \sum_{i=1}^k M_i \delta_{a_i}$ tiene masa en a_i, los núcleos en a_i están acotados: $L_n(a_i, a_i) \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$. Esto puede deducirse de (3.15), con $x = y = a_i$; o bien de la propiedad de los núcleos de ser los inversos de las funciones de Christoffel, que a su vez son mínimos de ciertas integrales (véase [Nv], pág. 4, por ejemplo). Por lo tanto, de (3.30) se tiene:

$$\|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le \|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} + C\sum_{j=1}^k u_2(a_j)^p u_1(a_j)^p.$$

Y, puesto que $u_1(a_j)u_2(a_j) < +\infty\ \forall j$, esto significa:

$$\|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le \|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} + C.$$

Evidentemente, también es cierto que:

$$\|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le \|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)};$$

es decir: $\|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} < Cv(a_i) \Leftrightarrow \|u_1 L_n(x,a_i)\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} < Cv(a_i)$. Por consiguiente, podemos dejar (3.29) en:

$$\|u_1 S_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\nu)}\ \forall f,n \Leftrightarrow \tag{3.31}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|u_1 T_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f\ \forall n, \\ \|u_1 L_n(x,a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le Cv(a_i)\ \forall n\ \forall i \end{cases}$$

El mismo proceso puede hacerse con normas fuertes.
Ahora examinemos la primera condición de la derecha de (3.31).

$$\|u_1 T_n f\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} = \sup_{y>0} y^p \int_{u_1|T_n f(x)|>y} u_2^p d\nu \le \sup_{y>0} y^p \int_{u_1|T_n f(x)|>y} u_2^p\,d\mu +$$

$$+\sum_{i=1}^k u_2(a_i)^p M_i \sup_{y>0} y^p \int_{u_1|T_n f(x)|>y} \delta_{a_i} = \|u_1 T_n f\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} +$$

$$+\sum_{i=1}^k u_2(a_i)^p M_i u_1(a_i)^p |T_n f(a_i)|^p,$$

y la misma desigualdad se cumple con normas fuertes. Puesto que también

$$\|u_1 T_n f\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le \|u_1 T_n f\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)}$$

y

$$M_i |u_1(a_i) u_2(a_i) T_n f(a_i)|^p \le \|u_1 T_n f\|^p_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)}$$

(igualmente con normas fuertes), se tiene:

$$\|u_1 T_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f, n \Leftrightarrow \tag{3.32}$$

$$\Leftrightarrow \|u_1 T_n f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \text{ y } u_1(a_i)u_2(a_i)|T_n f(a_i)| \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}$$

$\forall f, n$.
Ahora bien: $\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)} = \|fv\|_{L^p(d\mu)}$;

$$|T_n f(a_i)| = \left|\int_{\mathbb{R}} L_n(a_i, y) f(y)\,d\mu(y)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} L_n(a_i, y) v(y)^{-1} f(y) v(y)\,d\mu(y)\right|.$$

Luego:

$$\begin{aligned} u_1(a_i)u_2(a_i)|T_n f(a_i)| \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1(a_i)u_2(a_i)\|L_n(a_i, y)v(y)^{-1}\|_{L^q(d\mu)} \le C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1(a_i)u_2(a_i)\|L_n(a_i, y)\|_{L^q(v^{-q}\,d\mu)} \le C, \end{aligned}$$

lo que, llevado a (3.32) y de ahí a (3.31), se convierte en lo que teníamos que demostrar.

Observación 3.9. Las condiciones $u_1(a_i)u_2(a_i) < +\infty$ y $0 < v(a_i)\ \forall i$ son necesarias para la acotación débil o fuerte, según se desprende de las condiciones (2.3) y (2.4) del teorema 2.4, que son, respectivamente, $u_1 \in L^p_*(u_2^p d\nu)$ y $v^{-1} \in L^q(d\nu)$.

El resultado anterior puede demostrarse también para la convergencia débil restringida, con pequeños cambios:

Teorema 3.10. *Con la misma notación del teorema 3.8, se tiene:*

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \|u_1 S_n \chi_E\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\nu)}\ \forall E \text{ medible},\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|u_1 T_n \chi_E\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall E\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_1(a_i)u_2(a_i)\|L_n(x, a_i)v(x)^{-p}\|_{L^q_*(v^p\,d\mu)} \le C\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i, \\ \|u_1 L_n(x, a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C v(a_i)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \end{cases}$$

<u>Demostración</u>:
Repitiendo la demostración del teorema 3.8 con funciones del tipo χ_E, llegamos sin ninguna variación a (3.31) y (3.32), es decir:

$$\|u_1 S_n \chi_E\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\nu)}\ \forall E,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \tag{3.33}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|u_1 T_n \chi_E\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall E\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_1(a_i)u_2(a_i)|T_n \chi_E(a_i)| \le C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall E\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i, \\ \|u_1 L_n(x, a_i)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \le C v(a_i)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \end{cases}$$

Veamos la segunda condición:

$$u_1(a_i)u_2(a_i)|T_n\chi_E(a_i)| = \tag{3.34}$$

$$= u_1(a_i)u_2(a_i)\left|\int_{\mathbb{R}} L_n(a_i,y)\chi_E(y)\,d\mu(y)\right| \leq C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}.$$

Esta condición equivale a:

$$u_1(a_i)u_2(a_i)\int_{\mathbb{R}} |L_n(a_i,y)|\,\chi_E(y)\,d\mu(y) \leq C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}. \tag{3.35}$$

En efecto: es evidente que (3.35) $\Rightarrow$ (3.34); para el recíproco, basta descomponer E como unión de los conjuntos $E_1 = \{y \in E; L_n(a_i,y) \geq 0\}$ y $E_2 = \{y \in E; L_n(a_i,y) < 0\}$, con lo cual resulta

$$u_1(a_i)u_2(a_i)\int_{\mathbb{R}} |L_n(a_i,y)|\,\chi_E(y)\,d\mu(y) = u_1(a_i)u_2(a_i)\left|\int_{\mathbb{R}} L_n(a_i,y)\chi_{E_1}(y)\,d\mu(y)\right| +$$

$$+u_1(a_i)u_2(a_i)\left|\int_{\mathbb{R}} L_n(a_i,y)\chi_{E_2}(y)\,d\mu(y)\right| \leq C\|\chi_{E_1}\|_{L^p(v^p\,d\mu)}+$$

$$+C\|\chi_{E_2}\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \leq 2C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}.$$

A su vez,

$$u_1(a_i)u_2(a_i)\int_{\mathbb{R}} |L_n(a_i,y)|\,\chi_E(y)\,d\mu(y) \leq C\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1(a_i)u_2(a_i)\frac{\|L_n(a_i,y)\chi_E\|_{L^1(d\mu)}}{\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}} \leq C\ \forall E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1(a_i)u_2(a_i)\sup_E \frac{\|L_n(a_i,y)v(y)^{-p}\chi_E\|_{L^1(v^p\,d\mu)}}{\|\chi_E\|_{L^p(v^p\,d\mu)}} \leq C,$$

tomando el supremo en todos los conjuntos medibles E de medida $v^p\,d\mu$ finita y positiva. Pero, según el lema 2.2, esto equivale a:

$$u_1(a_i)u_2(a_i)\|L_n(x,a_i)v(x)^{-p}\|_{L^q_*(v^p\,d\mu)} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall i,$$

con lo que, sustituyendo en (3.33), el teorema queda demostrado.

Observación 3.11. De idéntica manera se prueban resultados similares al del teorema anterior, cuando el peso v se coloca en otro lugar o incluso se reparte. Por ejemplo, para la acotación $\|u_1S_n(v^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\nu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\nu)}$ se obtiene lo mismo, cambiando la segunda condición por $u_1(a_i)u_2(a_i)\|L_n(x,a_i)v(x)^{-1}\|_{L^q_*(d\mu)}$.

De las tres condiciones del teorema 3.8 que equivalen a la convergencia de la serie de Fourier, dos de ellas se refieren a la norma de los núcleos. La otra, en cambio, es la acotación uniforme de unos operadores similares a las sumas parciales de la serie de Fourier, pero sin las deltas de Dirac. Para acotar estos operadores puede utilizarse en algunos casos la descomposición de Pollard de los núcleos (véase [P 1]), una vez que se hayan encontrado cotas adecuadas para los polinomios ortonormales con respecto a la medida con deltas. Sin embargo, podemos encontrar un método más corto, al menos para la convergencia en media:

Proposición 3.12. *Sea $d\nu = d\mu + \sum_{i=1}^k M_i\delta_{a_i}$ como en el teorema 3.8. Para cada subconjunto $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}\}$ de $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, denotemos por $\{S_n^{a_{j_1},a_{j_2},\dots,a_{j_r}}\}$ la suma parcial enésima de la serie de Fourier con respecto a la medida*

$$d\mu^{a_{j_1},a_{j_2},\dots,a_{j_r}} = (x-a_{j_1})^2(x-a_{j_2})^2\dots(x-a_{j_r})^2\,d\mu(x)$$

[incluye el caso $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}\} = \emptyset \longrightarrow \{S_n\}, d\mu$].
Si para cada $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}\}$, existe $C > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in L^p(v^p\,d\mu)$ se tiene:

$$\|u_1|x-a_{j_1}|\cdots|x-a_{j_r}|S_n^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}}f\|_{L^p_*([u_2|x-a_{j_1}|^{-2/p}\cdots|x-a_{j_r}|^{-2/p}]^p\,d\mu^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}})} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{L^p([v|x-a_{j_1}|^{1-2/p}\cdots|x-a_{j_r}|^{1-2/p}]^p\,d\mu^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}})}, \tag{3.36}$$

entonces también existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|u_1T_nf\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in L^p(v^p\,d\mu).$$

Y lo mismo sucede sustituyendo normas débiles por normas fuertes.

Demostración:
Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}}(y-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})K_{n-r}^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}}(x,y)f(y)\,d\mu(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} K_{n-r}^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}}(x,y)\frac{f(y)}{(y-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})}\,d\mu^{a_{j_1},a_{j_2},\dots,a_{j_r}} =$$

$$= S_{n-r}^{a_{j_1},\dots,a_{j_r}}\left(\frac{f(y)}{(y-a_{j_1})\dots(y-a_{j_r})}, x\right),$$

del corolario 3.7 obtenemos:

$$T_nf(x) = \int_{\mathbb{R}} L_n(x,y)f(y)\,d\mu(y) =$$

$$= \sum A_{n,j_1,\ldots,j_r}(x-a_{j_1})\ldots(x-a_{j_r})S_{n-r}^{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}(\frac{f(y)}{(y-a_{j_1})\ldots(y-a_{j_r})},x),$$

donde el sumatorio lo es en los subconjuntos $\{j_1,\ldots,j_r\}$ de $\{1,\ldots,k\}$ y

$$\forall n \ \sum A_{n,j_1,\ldots,j_r} = 1, 0 < A_{n,j_1,\ldots,j_r} \ \forall j_1,\ldots,j_r.$$

Basta entonces demostrar que:

$$\|u_1|x-a_{j_1}|\ldots|x-a_{j_r}|S_{n-r}^{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}(\frac{f(y)}{(y-a_{j_1})\ldots(y-a_{j_r})},x)\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \ \forall n\in\mathbb{N}, \ \forall f\in L^p(v^p\,d\mu).$$

Es decir:

$$\|u_1|x-a_{j_1}|\ldots|x-a_{j_r}|S_{n-r}^{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}f\|_{L^p_*(u_2^p\,d\mu)} \leq$$
$$\leq C\|f(x)|x-a_{j_1}|\ldots|x-a_{j_r}|\|_{L^p(v^p\,d\mu)} \ \forall n, \ \forall f.$$

Y esto no es más que (3.36), ya que

$$\left[u_2(x)|x-a_{j_1}|^{-2/p}\ldots|x-a_{j_r}|^{-2/p}\right]^p \, d\mu^{a_{j_1},a_{j_2},\ldots,a_{j_r}} = u_2^p\,d\mu$$

y

$$\left[v(x)|x-a_{j_1}|^{1-2/p}\ldots|x-a_{j_r}|^{1-2/p}\right]^p \, d\mu^{a_{j_1},a_{j_2},\ldots,a_{j_r}} =$$
$$= [v(x)|x-a_{j_1}|\ldots|x-a_{j_r}|]^p \, d\mu.$$

Por lo tanto, la proposición es cierta.

§2. Pesos de Jacobi generalizados más deltas de Dirac

En este apartado aplicaremos los resultados del anterior cuando la medida de partida es un peso de Jacobi generalizado. Como ya se vio anteriormente, por tal se entiende un peso sobre el intervalo $[-1,1]$ de la forma

$$w(x) = h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{\gamma_i}, \ x\in[-1,1], \tag{3.37}$$

donde

a) $\alpha, \beta, \gamma_i > -1$, $t_i \in (-1,1)$, $t_i \neq t_j$ $\forall i \neq j$;

b) h es una función continua y positiva en $[-1,1]$ y $\omega(h,\delta)\delta^{-1} \in L^1(0,2)$, siendo $\omega(h,\delta)$ el módulo de continuidad de h.

Para estas medidas se conocen cotas de sus polinomios ortonormales, estimaciones asintóticas de sus núcleos y el intervalo de convergencia de la serie de Fourier en media, con pesos del mismo tipo (véase [Nv], [B]). Un resumen de estas propiedades se expuso en el capítulo I.

El problema que vamos a abordar es el de la convergencia en media de la serie de Fourier de polinomios ortonormales con respecto a una medida $d\nu(x) = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i\delta_{a_i}$, donde $\forall i$ $0 < M_i$, $a_i \in [-1,1]$ y donde w es un peso de Jacobi generalizado. El caso particular de un peso de Jacobi y las deltas situadas en los puntos $\{\pm 1\}$ fue resuelto por Varona (véase [V], cap. IV) manipulando cuidadosamente estimaciones asintóticas de los polinomios de Jacobi en las que intervienen funciones de Bessel. Poniéndolo en relación con este, fue resuelto asimismo el caso de una medida $(1-x^2)^{\alpha}|x|^{\gamma} + M\delta_0(x) + N\delta_{-1}(x) + N\delta_1(x)$. Sin embargo, para pesos del tipo (3.37) no se dispone de estimaciones asintóticas tan precisas y es difícil generalizar el argumento de [V]. En su lugar, seguiremos el camino descrito en la primera parte de este capítulo. Con el fin de estudiar esta convergencia obtendremos previamente acotaciones para los polinomios ortonormales y los núcleos, acotaciones que son similares a las correspondientes a la medida sin deltas. En lo fundamental, el método consiste en aplicar reiteradamente las proposiciones 3.4 y 3.6, que proporcionan cotas para los polinomios y los núcleos que resultan de sumar una delta de Dirac a una medida.

En adelante, w será un peso de la forma (3.37), $\{Q_n\}$ será la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida $d\nu(x) = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i\delta_{a_i}$ sobre el intervalo $[-1,1]$ y $\{L_n\}$ la sucesión de los núcleos.

Con la notación anterior, no es ninguna restricción considerar, y así lo haremos, que los puntos a_i, donde se añaden las deltas de Dirac, están incluidos en $\{1,-1,t_1,\ldots,t_N\}$: si es necesario, podemos “añadir” a la expresión del peso w factores de la forma $|x-a_i|^{\gamma}$, con $\gamma = 0$. Más aún, para cualquier punto $t \in [-1,1]$, podemos hablar de su exponente en w, refiriéndonos con ello al exponente del factor $|x-t|^\gamma$ presente en w; naturalmente, sólo hay una cantidad finita de puntos en $[-1,1]$ con exponente no nulo.

Podemos establecer ya la primera de las acotaciones de este capítulo. Como siempre, las constantes C no tendrán por qué ser las mismas en expresiones distintas.

Proposición 3.13. *Existen dos constantes C, independientes de $n \geq 1$ y de $x \in [-1,1]$, tales que:*

$$|Q_n(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-\frac{2\alpha+1}{4}}(1+x+n^{-2})^{-\frac{2\beta+1}{4}}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\frac{\gamma_i}{2}}. \tag{3.38}$$

$$|L_n(x,x)| \leq Cn(1-x+n^{-2})^{-\frac{2\alpha+1}{2}}(1+x+n^{-2})^{-\frac{2\beta+1}{2}}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i}. \tag{3.39}$$

Demostración:
a) Establecemos primero la acotación de los polinomios Q_n, por inducción sobre el número k de deltas de Dirac.
Si $k=0$, $d\nu$ es un peso de Jacobi generalizado y, como vimos en (1.9), la acotación (3.38) es cierta.
Sea ahora $k>0$ y supongamos que la propiedad (3.38) es válida para $k-1$. Sean $d\mu(x) = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k-1} M_i\delta_{a_i}$ y $\{P_n\}$ la sucesión de sus polinomios ortonormales. Siguiendo la notación del capítulo anterior, $\{P_n^{a_k}\}$ es la sucesión de polinomios correspondientes a

$$(x-a_k)^2\,d\mu(x) = (x-a_k)^2 w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k-1}(a_i-a_k)^2 M_i\delta_{a_i}(x).$$

Puesto que $d\nu = d\mu + M_k\delta_{a_k}$, de la proposición 3.4 se tiene:

$$Q_n(x) = A_nP_n(x) + B_n(x-a_k)P_{n-1}^{a_k}(x), \text{ con } A_n, B_n \in (0,1). \tag{3.40}$$

Ahora bien, $d\mu$ es un peso de Jacobi generalizado más $k-1$ deltas de Dirac, luego, por hipótesis, verifica la acotación:

$$|P_n(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2}. \tag{3.41}$$

También $(x-a_k)^2\,d\mu$ es un peso de Jacobi generalizado (el peso ahora es $(x-a_k)^2w(x)$) más $k-1$ deltas de Dirac. Supongamos que $a_k \neq \pm 1$; si el exponente de $|x-a_k|$ en $w(x)$ es γ, entonces en $(x-a_k)^2 w(x)$ es $\gamma+2$; por consiguiente, se tiene la acotación:

$$|P_{n-1}^{a_k}(x)| \leq$$

$$\leq C(1-x+n^{-2})^{-\frac{2\alpha+1}{4}}(1+x+n^{-2})^{-\frac{2\beta+1}{4}}(|x-a_k|+n^{-1})^{-\frac{\gamma+2}{2}} \prod_{i=1, t_i \neq a_k}^{N} (|x-t_i|+n^{-1})^{-\frac{\gamma_i}{2}}.$$

Nótese que en esta última cota aparece n y no $n-1$, como debería ser por tratarse del polinomio de grado $n-1$; no es difícil comprobar que la equivalencia $n \sim n-1$ nos permite escribir n.
El miembro de la derecha de la desigualdad anterior puede ponerse como:

$$C(|x-a_k|+n^{-1})^{-1}(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2},$$

por lo que

$$|x-a_k||P_{n-1}^{a_k}(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\frac{\gamma_i}{2}}.$$

A este mismo resultado se llega si $a_k = \pm 1$. Llevando esta acotación y (3.41) a (3.40), se obtiene (3.38). La expresión (3.38) es entonces válida para cualquier número k de deltas de Dirac.
b) Veamos ahora la desigualdad (3.39). Los núcleos correspondientes a pesos de Jacobi generalizados satisfacen la estimación (1.10):

$$K_n(x,x) \sim n(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/2}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/2}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i}$$

y por lo tanto (3.39) es cierta si $k=0$.
Por otro lado, con la notación que hemos adoptado, de (3.15) se tiene la siguiente fórmula:

$$L_n(x,x) = \frac{1}{1+M_k K_n(a_k,a_k)} K_n(x,x) + \frac{M_k K_n(a_k,a_k)}{1+M_k K_n(a_k,a_k)}(x-a_k)^2 K_{n-1}^{a_k}(x,x),$$

donde los núcleos K_n corresponden a $d\mu(x) = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k-1} M_i \delta_{a_i}$ y los núcleos $K_n^{a_k}$, a $(x-a_k)^2\,d\mu$. Es decir:

$$L_n(x,x) = C_n K_n(x,x) + (1-C_n)(x-a_k)^2 K_{n-1}^{a_k}(x,x),$$

con $C_n \in (0,1)$. Procediendo ahora por inducción, igual que en el apartado a), se demuestra la acotación (3.39), con lo que la proposición queda probada.

La proposición anterior se refiere solamente a acotaciones superiores, lo que en ciertas ocasiones no es suficiente. Necesitaremos conocer exactamente, por ejemplo, el orden de crecimiento de los núcleos $L_n(x,x)$. En el caso de un peso de Jacobi generalizado, sin parte singular, disponemos de la estimación (1.10), que es global, para $x \in [-1,1]$ y todo n:

$$K_n(x,x) \sim n(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/2}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/2}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i}.$$

Sin embargo, la estimación anterior no puede seguir siendo cierta, cuando añadimos deltas, en los puntos a_i con masa: en tales puntos, $\lim_{n\to\infty} L_n(a_i,a_i) \in \mathbb{R}$. Esto puede deducirse de (3.15), con $x = y = a_i$; o bien de la propiedad de los núcleos de ser los inversos de las funciones de Christoffel, que a su vez son mínimos de ciertas integrales (véase [Nv], pág. 4, por ejemplo). Por el contrario, la parte de la derecha de la expresión precedente no está acotada en ningún punto de $[-1,1]$.

No obstante, sí podemos llegar a dicha estimación, puntualmente, en los puntos sin masa; esto será bastante para los cálculos posteriores.

Proposición 3.14.

a) *Sea $t \in (-1,1)$, $t \neq a_i$ para todo i; sea γ su exponente en w. Entonces, $L_n(t,t) \sim n^{1+\gamma}$.*

b) *Supongamos que $a_i \neq 1$ para todo i. Entonces, $L_n(1,1) \sim n^{2\alpha+2}$.*

c) *Supongamos que $a_i \neq -1$ para todo i. Entonces, $L_n(-1,-1) \sim n^{2\beta+2}$.*

Demostración:
Por inducción sobre el número k de deltas de Dirac.
Si $k = 0$, la medida es un peso de Jacobi generalizado y tenemos la estimación (1.10):

$$L_n(x,x) \sim n(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/2}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/2}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i},$$

de donde se deduce que:

$$L_n(t,t) \sim n^{1+\gamma}, \qquad L_n(1,1) \sim n^{2\alpha+2}, \qquad L_n(-1,-1) \sim n^{2\beta+2}.$$

Es decir, la propiedad es cierta en este caso. Nótese que las respectivas hipótesis $a_i \neq t$, $a_i \neq 1$, $a_i \neq -1$ se cumplen trivialmente, porque no hay ningún punto a_i. Sea ahora $k > 0$ y supongamos que la propiedad es cierta para $k-1$ deltas de Dirac.

Sean $d\mu(x) = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k-1} M_i\delta_{a_i}$ y $\{K_n\}$ la sucesión de sus núcleos. $\{K_n^{a_k}\}$ es la sucesión de núcleos de

$$(x-a_k)^2\,d\mu(x) = (x-a_k)^2 w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k-1}(a_i-a_k)^2 M_i\delta_{a_i}(x).$$

Puesto que $d\nu = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i\delta_{a_i} = d\mu + M_k\delta_{a_k}$, de (3.15) se tiene, $\forall x \in [-1,1]$,

$$L_n(x,x) = C_n K_n(x,x) + (1-C_n)(x-a_k)^2 K_{n-1}^{a_k}(x,x), \text{ con } C_n \in (0,1). \tag{3.42}$$

Tanto $d\mu$ como $(x-a_k)^2\,d\mu$ son pesos de Jacobi generalizados más $k-1$ deltas de Dirac, por lo que:

$$K_n(t,t) \sim n^{1+\gamma};\quad K_{n-1}^{a_k}(t,t) \sim (n-1)^{1+\gamma} \sim n^{1+\gamma} \text{ si } t \neq a_i, 1 \le i \le k-1;$$

$$K_n(1,1) \sim n^{2\alpha+2};\quad K_{n-1}^{a_k}(1,1) \sim (n-1)^{2\alpha+2} \sim n^{2\alpha+2} \text{ si } a_i \neq 1, 1 \le i \le k-1;$$

$$K_n(-1,-1) \sim n^{2\beta+2};\ K_{n-1}^{a_k}(-1,-1) \sim (n-1)^{2\beta+2} \sim n^{2\beta+2} \text{ si } a_i \neq 1, 1 \le i \le k-1.$$

Teniendo en cuenta que, fijado $x \neq a_k$, $(x-a_k)^2$ es una constante no nula, a partir de estas estimaciones obtenemos las mismas para los núcleos L_n, mediante (3.42). Por lo tanto, si la proposición se cumple con $k-1$ deltas también se cumple con k deltas de Dirac. Luego es válida para cualquier número k de deltas, como queríamos demostrar.

Para estudiar la convergencia en media de la serie de Fourier para la medida $d\nu = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i\delta_{a_i}$, disponemos del teorema 3.8 y la proposición 3.12. En el primero se dan tres condiciones necesarias y suficientes para la convergencia; de ellas, dos se refieren a la norma de los núcleos $L_n(x,a_i)$ con pesos, por lo que es interesante encontrar cotas adecuadas de dichos núcleos. Esto es lo que nos proporciona el siguiente resultado:

Proposición 3.15.

a) Sea $1 \le i \le k$ y supongamos que $a_i \neq \pm 1$. Existe una constante C tal que $\forall x \in [-1,1]$ y para todo $n \ge 1$,

$$|L_n(x,a_i)| \le C(1-x+n^{-2})^{-\frac{2\alpha+1}{4}}(1+x+n^{-2})^{-\frac{2\beta+1}{4}} \prod_{t_j \neq a_i}(|x-t_j|+n^{-1})^{-\frac{\gamma_j}{2}}.$$

b) Si en 1 hay una delta de Dirac, entonces existe una constante C tal que $\forall x \in [-1,1]$ y para todo $n \ge 1$,

$$|L_n(x,1)| \le C(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2}.$$

c) Si en -1 hay una delta de Dirac, entonces existe una constante C tal que $\forall x \in [-1,1]$ y para todo $n \geq 1$,

$$|L_n(x,-1)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4} \prod_{i=1}^{N} (|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2}.$$

Demostración:
a) Sea $1 \leq i \leq k$, $a_i \neq \pm 1$. Sea γ el exponente de $|x-a_i|$ en w. Definamos:

$$d\mu = w(x)\,dx + \sum_{j=1, j\neq i}^{k} M_j \delta_{a_j}.$$

Es decir, $d\nu = d\mu + M_i \delta_{a_i}$. Sean $\{P_n\}$ y $\{K_n\}$ los polinomios ortonormales y los núcleos de $d\mu$ y k_n el coeficiente director de P_n, para cada n. Análogamente, $\{P_n^{a_i}\}$, $\{K_n^{a_i}\}$ y $k_n^{a_i}$ con relación a $(x-a_i)^2\,d\mu$. Por comodidad, sea

$$\Psi_n(x) = (1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4} \prod_{t_j \neq a_i} (|x-t_j|+n^{-1})^{-\gamma_j/2}.$$

Tenemos entonces que demostrar que $|L_n(x,a_i)| \leq C\Psi_n(x)$. Para los núcleos $L_n(x,a_i)$ tenemos, por (3.15), la fórmula:

$$L_n(x,a_i) = \frac{1}{1+M_i K_n(a_i,a_i)} K_n(x,a_i).$$

A su vez, según el lema 3.1:

$$K_n(x,a_i) = \frac{k_n}{k_n^{a_i}} P_n(a_i) P_n^{a_i}(x) - \frac{k_{n-1}^{a_i}}{k_{n+1}} P_{n+1}(a_i) P_{n-1}^{a_i}(x).$$

Por lo tanto,

$$L_n(x,a_i) = \frac{k_n}{k_n^{a_i}} \frac{P_n(a_i)}{1+M_i K_n(a_i,a_i)} P_n^{a_i}(x) - \frac{k_{n-1}^{a_i}}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(a_i)}{1+M_i K_n(a_i,a_i)} P_{n-1}^{a_i}(x). \tag{3.43}$$

Vamos a acotar ahora la expresión de la derecha. En primer lugar, por la desigualdad (3.38), obtenemos:

$$|P_n(a_i)| \leq C n^{\gamma/2}; \tag{3.44}$$

$$|P_n^{a_i}(x)| \leq C(|x-a_i|+n^{-1})^{-(\gamma+2)/2} \Psi_n(x). \tag{3.45}$$

Debido a que $n \sim n-1$, no es difícil demostrar que $P_{n-1}^{a_i}$ satisface (3.45), pero sin necesidad de sustituir n por $n-1$. Por supuesto, P_{n+1} cumple (3.44) sin cambiar n por $n+1$.
En cuanto a los $K_n(a_i, a_i)$, la medida $d\mu$ no tiene deltas en a_i, de modo que, según la proposición 3.14.a), se cumple la estimación:

$$K_n(a_i, a_i) \sim n^{1+\gamma}. \tag{3.46}$$

Por otra parte, $\operatorname{sop} d\mu = [-1, 1]$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto, así que, por el lema 3.2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_n^{a_i}} = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{k_{n-1}^{a_i}}{k_{n+1}} = \frac{1}{2}. \tag{3.47}$$

De (3.44), (3.46) y (3.47) se deduce entonces que:

$$\left| \frac{k_n}{k_n^{a_i}} \frac{P_n(a_i)}{1 + M_i K_n(a_i, a_i)} \right| \leq C n^{-1-\gamma/2};$$

$$\left| \frac{k_{n-1}^{a_i}}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(a_i)}{1 + M_i K_n(a_i, a_i)} \right| \leq C n^{-1-\gamma/2}.$$

Sustituyendo estas acotaciones y (3.45), con su análoga para $P_{n-1}^{a_i}$, en (3.43), obtenemos:

$$|L_n(x, a_i)| \leq C n^{-1-\gamma/2} (|x - a_i| + n^{-1})^{-1-\gamma/2} \Psi_n(x).$$

Pero como $\gamma > -1$, $-1 - \gamma/2 < 0$; luego $(|x - a_i| + n^{-1})^{-1-\gamma/2} < (n^{-1})^{-1-\gamma/2}$ y, por fin, $|L_n(x, a_i)| \leq C\Psi_n(x)$, como queríamos demostrar.
b) Sea $d\mu = w(x)\,dx + \sum_{i=1, a_i \neq 1}^{k} M_i \delta_{a_i}$, con lo que $d\nu = d\mu + M\delta_1$, con $M > 0$.
Sean $\{P_n\}$ y $\{K_n\}$ los polinomios ortonormales y los núcleos de $d\mu$ y k_n el coeficiente director de P_n, para cada n. Sean ahora $\{R_n\}$ los polinomios ortonormales con respecto a $(1-x)\,d\mu$ y $\{r_n\}$ sus coeficientes directores. Observemos que $(1-x)\,d\mu$ es también un peso de Jacobi generalizado más deltas de Dirac:

$$(1-x)\,d\mu = (1-x) w(x)\,dx + \sum_{i=1, a_i \neq 1}^{k} (1 - a_i) M_i \delta_{a_i}.$$

Los núcleos $K_n(x, 1)$ están caracterizados por la propiedad siguiente (proposición 1.9):

$$\int_{-1}^{1} K_n(x, 1) P(x) d\mu(x) = P(1) \ \forall \text{ polinomio } P \text{ de grado no superior a } n.$$

Por lo tanto:

$$\int_{-1}^{1} K_n(x,1)R_m(x)(1-x)\,d\mu(x) = 0, \qquad 0 \le m < n,$$

de donde $K_n(x,1)$ es igual a $R_n(x)$, salvo un factor constante. Examinando ahora sus respectivos coeficientes directores, resulta:

$$K_n(x,1) = \frac{k_n}{r_n} P_n(1) R_n(x).$$

De esta manera, la fórmula $L_n(x,1) = \frac{1}{1+MK_n(1,1)} K_n(x,1)$, a la que llegamos por (3.15), se convierte en:

$$L_n(x,1) = \frac{k_n}{r_n} \frac{P_n(1)}{1+MK_n(1,1)} R_n(x). \tag{3.48}$$

Tanto $d\mu$ como $(1-x)\,d\mu$ son pesos de Jacobi generalizados más deltas de Dirac, con exponentes α y $\alpha+1$ en $(1-x)$, respectivamente; además, las deltas están colocadas en puntos distintos del 1. De las proposiciones 3.13 y 3.14 se deduce inmediatamente que:

$$|P_n(1)| \le C n^{\alpha+1/2}; \tag{3.49}$$

$$|R_n(x)| \le C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+3)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4} \prod_{i=1}^{N} (|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2}; \tag{3.50}$$

$$K_n(1,1) \sim n^{2(\alpha+1)}. \tag{3.51}$$

Además, usando la desigualdad de Hölder,

$$\frac{k_n}{r_n} = \int_{-1}^{1} R_n(x)P_n(x)(1-x)\,d\mu(x) \le$$

$$\le \left(\int_{-1}^{1} R_n(x)^2(1-x)^2\,d\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,d\mu(x)\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2} \left(\int_{-1}^{1} R_n(x)^2(1-x)\,d\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,d\mu(x)\right)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Con esta acotación y (3.49), (3.50) y (3.51) se llega, por (3.48), a que:

$$|L_n(x,1)| \le C n^{-\alpha-\frac{3}{2}}(1-x+n^{-2})^{-\frac{2\alpha+3}{4}}(1+x+n^{-2})^{-\frac{2\beta+1}{4}} \prod_{i=1}^{N} (|x-t_i|+n^{-1})^{-\frac{\gamma_i}{2}};$$

Y de esto se obtiene el apartado b) de la proposición, sin más que observar que

$$\alpha > -1 \Rightarrow -\tfrac{2\alpha+3}{4} < 0 \Rightarrow n^{-\alpha-\frac{3}{2}}(1-x+n^{-2})^{-\frac{2\alpha+3}{4}} \le n^{-\alpha-\frac{3}{2}}(n^{-2})^{-\frac{2\alpha+3}{4}} = 1.$$

El apartado c) se demuestra de la misma manera que el b), con lo que la proposición queda probada.

Podemos ahora resolver el problema de la acotación en media de la serie de Fourier para medidas que son suma de un peso de Jacobi generalizado y de deltas de Dirac en el intervalo $[-1,1]$:

Teorema 3.16. *Sea, como hasta ahora, $d\nu(x) = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i\delta_{a_i}$, donde w cumple (3.37) y $1 < p < \infty$. Sean:*

$$u(x) = (1-x)^a(1+x)^b\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{g_i}\ \forall x \ne a_i\ \forall i, \qquad 0 < u(a_i) < +\infty;$$

$$v(x) = (1-x)^A(1+x)^B\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{G_i}\ \forall x \ne a_i\ \forall i, \qquad 0 < v(a_i) < +\infty.$$

Por último, sea S_n ($n \in \mathbb{N}$) la suma parcial enésima del desarrollo de Fourier con respecto a los polinomios ortonormales de $d\nu$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $\exists C > 0$ tal que $\|S_nf\|_{L^p(u^p\,d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\,d\nu)}$ $\forall f \in L^p(v^p\,d\nu)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Se verifican las condiciones:

$$\begin{cases} A+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}; \qquad B+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}; \\ G_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}\ \forall i; \end{cases} \tag{3.52}$$

$$\begin{cases} A+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\alpha+1}{2}; \qquad B+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\beta+1}{2}; \\ G_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{\gamma_i+1}{2}\ \forall i; \end{cases} \tag{3.53}$$

$$\begin{cases} a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}; \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}; \\ g_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{2}\ \forall i; \end{cases} \tag{3.54}$$

$$\begin{cases} a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\alpha+1}{2}; \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\beta+1}{2}; \\ g_i+(\gamma_i+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{\gamma_i+1}{2}\ \forall i; \end{cases} \tag{3.55}$$

$$A \le a; \quad B \le b; \quad G_i \le g_i\ \forall i. \tag{3.56}$$

Demostración:
b) $\Rightarrow$ a): de acuerdo con el teorema 3.8 y la proposición 3.12, teniendo en cuenta que $0 < u(a_i)$ y $v(a_i) < +\infty\ \forall i$, basta probar las tres desigualdades siguientes:

$$\|u|x-a_{j_1}|^{1-2/p}\cdots|x-a_{j_r}|^{1-2/p}S_n^{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}f\|_{L^p(|x-a_{j_1}|^2\cdots|x-a_{j_r}|^2w)} \leq \tag{3.57}$$

$$\leq C\|v|x-a_{j_1}|^{1-2/p}\cdots|x-a_{j_r}|^{1-2/p}f\|_{L^p(|x-a_{j_1}|^2\cdots|x-a_{j_r}|^2w)}$$

para cada subconjunto $\{j_1,\ldots j_r\}$ de $\{1,\ldots k\}$, donde $S_n^{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}$ es la suma parcial enésima de la serie de Fourier correspondiente a $|x-a_{j_1}|^2\ldots|x-a_{j_r}|^2w(x)\,dx$;

$$\|L_n(x,a_i)\|_{L^q(v^{-q}w)} \leq C\forall n\in\mathbb{N}; \tag{3.58}$$

$$\|L_n(x,a_i)\|_{L^p(u^pw)} \leq C\forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.59}$$

La primera condición se refiere sólo a la acotación en media para pesos de Jacobi generalizados, sin parte singular; este caso está ya bien estudiado. Para las otras dos, utilizaremos las cotas de los $L_n(x,a_i)$ halladas anteriormente. Comencemos por la condición (3.57):
Se trata de la acotación de la serie de Fourier para el peso de Jacobi generalizado $w_0(x)=|x-a_{j_1}|^2\ldots|x-a_{j_r}|^2w(x)$, con los pesos

$$u_0(x)=|x-a_{j_1}|^{1-2/p}\cdots|x-a_{j_r}|^{1-2/p}u(x)$$

y

$$v_0(x)=|x-a_{j_1}|^{1-2/p}\cdots|x-a_{j_r}|^{1-2/p}v(x).$$

En esta situación, las condiciones (3.52)-(3.56), sustituyendo α, a, A, etc. por los exponentes de w_0, u_0 y v_0, son suficientes (también necesarias) para la acotación en media. Sólo hace falta escribir (3.52)-(3.56) para estos pesos y comprobar que se verifican.
En los puntos distintos de los a_i, w_0, u_0 y v_0 tienen los mismos exponentes que w, u y v, respectivamente. Y si en un punto a_i los exponentes de w, u y v son γ, g y G, entonces los de w_0, u_0 y v_0 son $\gamma+2$, $g+1-2/p$ y $G+1-2/p$. Por lo tanto, las desigualdades que deben cumplirse para tener (3.57) son:

- en los puntos distintos de los a_i, las mismas (3.52)-(3.56), que suponemos ciertas;

- en los puntos a_i, las desigualdades siguientes, si $a_i=1$, o sus análogas con β o γ_i:
$$(A+1-\frac{2}{p})+(\alpha+2+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{1}{4};$$

$$(A+1-\frac{2}{p})+(\alpha+2+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})<\frac{\alpha+2+1}{2};$$
$$(a+1-\frac{2}{p})+(\alpha+2+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{1}{4};$$
$$(a+1-\frac{2}{p})+(\alpha+2+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>-\frac{\alpha+2+1}{2};$$
$$A+1-\frac{2}{p}\leq a+1-\frac{2}{p};$$

y es inmediato comprobar que estas desigualdades se verifican si lo hacen (3.52)-(3.56). Por consiguiente, se cumple (3.57).

Veamos ahora (3.58). Para los núcleos $L_n(x,a_i)$ tenemos las acotaciones de la proposición 3.15, que son, según los casos $a_i \neq \pm 1$, $a_i = 1$ o $a_i = -1$, las siguientes:

$$|L_n(x,a_i)|\leq C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{t_j\neq a_i}(|x-t_j|+n^{-1})^{-\gamma_j/2},$$

$$|L_n(x,1)|\leq C(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2},$$
$$|L_n(x,-1)|\leq C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}\prod_{i=1}^{N}(|x-t_i|+n^{-1})^{-\gamma_i/2}.$$

Supongamos, por concretar, que $a_i \neq \pm 1$. Según lo anterior,

$$\int_{-1}^{1}|L_n(x,a_i)|^q v(x)^{-q}w(x)\,dx\leq$$

$$\leq C\int_{-1}^{1}(1-x+n^{-2})^{-q\frac{2\alpha+1}{4}}(1+x+n^{-2})^{-q\frac{2\beta+1}{4}}\prod_{t_j\neq a_i}(|x-t_j|+n^{-1})^{-q\frac{\gamma_j}{2}}v(x)^{-q}w(x)\,dx.$$

Si podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada a esta última expresión, entonces llegaremos, por ser

$$\lim_{n\to\infty}(1-x+n^{-2})^{-q(2\alpha+1)/4}(1+x+n^{-2})^{-q(2\beta+1)/4}\prod_{t_j\neq a_i}(|x-t_j|+n^{-1})^{-q\gamma_j/2}=$$

$$=(1-x)^{-q(2\alpha+1)/4}(1+x)^{-q(2\beta+1)/4}\prod_{t_j\neq a_i}|x-t_j|^{-q\gamma_j/2},$$

a que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-1}^{1}|L_n(x,a_i)|^q v(x)^{-q}w(x)\,dx\leq$$

$$\leq C \int_{-1}^{1} (1-x)^{-q(2\alpha+1)/4}(1+x)^{-q(2\beta+1)/4} \prod_{t_j \neq a_i} |x-t_j|^{-q\gamma_j/2} v(x)^{-q} w(x)\, dx, \tag{3.60}$$

con lo que sólo habrá que comprobar que esta integral es finita.
Veamos antes que se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada: cada uno de los factores $(1-x+n^{-2})^{-q(2\alpha+1)/4}$, $(1+x+n^{-2})^{-q(2\beta+1)/4}$ y $(|x-t_j|+n^{-1})^{-q\gamma_j/2}$ está acotado por su respectivo límite (si el exponente es negativo) o por una constante (cuando el exponente es positivo, por ser $1-x+n^{-2}$, $1+x+n^{-2}$, $|x-t_i|+n^{-1}<3$). Por consiguiente, sólo hay que comprobar la integrabilidad de:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{E_{(1)}}(1+x)^{E_{(-1)}} \prod_{t_j \neq a_i} |x-t_j|^{E_j} v(x)^{-q} w(x)\, dx, \tag{3.61}$$

donde $E_{(1)} = \text{mín}\{-q\frac{2\alpha+1}{4}, 0\}$, $E_{(-1)} = \text{mín}\{-q\frac{2\beta+1}{4}, 0\}$, $E_j = \text{mín}\{-q\frac{\gamma_j}{2}, 0\}$. Es decir, teniendo en cuenta que

$$v(x)^{-q}w(x) = (1-x)^{-Aq+\alpha}(1+x)^{-Bq+\beta}\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{-G_iq+\gamma_j},$$

hay que probar:

$$E_{(1)} - Aq + \alpha > -1; \qquad E_{(-1)} - Bq + \beta > -1;$$

$$E_j - G_jq + \gamma_j > -1 \text{ si } t_j \neq a_i; \qquad -G_jq + \gamma_j > -1 \text{ si } t_j = a_i.$$

Y, una vez hecho esto, habrá que probar, para demostrar que la integral que aparece en (3.60) es finita, lo siguiente:

$$-q(2\alpha+1)/4 - Aq + \alpha > -1; \qquad -q(2\beta+1)/4 - Bq + \beta > -1;$$

$$-q\gamma_j/2 - G_jq + \gamma_j > -1 \text{ si } t_j \neq a_i; \qquad -G_jq + \gamma_j > -1 \text{ si } t_j = a_i.$$

Todo esto será cierto si se cumplen:

$$-q\frac{2\alpha+1}{4} - Aq + \alpha > -1;\ -q\frac{2\beta+1}{4} - Bq + \beta > -1;\ -q\frac{\gamma_j}{2} - G_jq + \gamma_j > -1\ \forall j; \tag{3.62}$$

$$-Aq + \alpha > -1; \qquad -Bq + \beta > -1; \qquad -G_jq + \gamma_j > -1\ \forall j. \tag{3.63}$$

A idéntica conclusión se llega si $a_i = \pm 1$: en los pasos intermedios (3.60) y (3.61) desaparecen entonces los factores $(1-x)$ o $(1+x)$ y la restricción $t_j \neq a_i$, pero, finalmente, (3.62) y (3.63) vuelven a ser suficientes para (3.58). En definitiva, si demostramos (3.62) y (3.63), habremos demostrado también la acotación (3.58). Es fácil comprobar que estas desigualdades se cumplen:

$$-q(2\alpha+1)/4 - Aq + \alpha > -1 \Leftrightarrow (2\alpha+1)/4 + A + (\alpha+1)(-1/q) < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\alpha+1)/4 + A + (\alpha+1)(1/p-1) < 0 \Leftrightarrow A + (\alpha+1)(1/p-1/2) < 1/4 \Leftarrow (3.52);$$

análogamente, (3.52) $\Rightarrow -q(2\beta+1)/4 - Bq + \beta > -1$;

$$-q\gamma_j/2 - G_jq + \gamma_j > -1 \Leftrightarrow \gamma_j/2 + G_j + (\gamma_j+1)(-1/q) < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \gamma_j/2 + G_j + (\gamma_j+1)(1/p-1) < 0 \Leftrightarrow G_j + (\gamma_j+1)(1/p-1/2) < 1/2 \Leftarrow (3.52),\ \forall j;$$

$$-Aq + \alpha > -1 \Leftrightarrow A + (\alpha+1)(-1/q) < 0 \Leftrightarrow A + (\alpha+1)(1/p-1/2) < \tfrac{\alpha+1}{2} \Leftarrow (3.53);$$

análogamente, (3.53) $\Rightarrow -Bq + \beta > -1$ y $-G_jq + \gamma_j > -1\ \forall j$.
Es decir: (3.62) y (3.63) son ciertas y, por lo tanto, (3.58).
Sólo falta demostrar (3.59). Pero esta es la misma (3.58), cambiando q por p y v por u^{-1}. Por consiguiente, para ver que se cumple basta con probar las desigualdades correspondientes a (3.62) y (3.63) con dichos cambios, esto es:

$$(3.64)\quad -p\tfrac{2\alpha+1}{4} + ap + \alpha > -1; \quad -p\tfrac{2\beta+1}{4} + bp + \beta > -1; \quad -p\tfrac{\gamma_j}{2} + g_jp + \gamma_j > -1\ \forall j;$$

$$(3.65)\qquad ap + \alpha > -1; \qquad bp + \beta > -1; \qquad g_jp + \gamma_j > -1\ \forall j.$$

De nuevo se trata de una simple comprobación:

$$-p(2\alpha+1)/4 + ap + \alpha > -1 \Leftrightarrow a + (\alpha+1)/p > (2\alpha+1)/4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a + (\alpha+1)(1/p-1/2) > -1/4 \Leftarrow (3.54);$$

análogamente, (3.54) $\Rightarrow -p(2\beta+1)/4 + bp + \beta > -1$;

$$-p\gamma_j/2 + g_jp + \gamma_j > -1 \Leftrightarrow g_j + (\gamma_j+1)/p > \gamma_j/2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g_j + (\gamma_j+1)(1/p-1/2) > -1/2 \Leftarrow (3.54),\ \forall j;$$

$$ap + \alpha > -1 \Leftrightarrow a + (\alpha+1)(1/p-1/2) > -(\alpha+1)/2 \Leftarrow (3.55);$$

análogamente, (3.55) $\Rightarrow bp + \beta > -1$ y $g_jp + \gamma_j > -1\ \forall j$.
Luego (3.64) y (3.65) se cumplen y, por lo tanto, (3.59). Esto demuestra que b) $\Rightarrow$ a).
a) $\Rightarrow$ b): Aplicando el teorema 1.12 de Máté - Nevai - Totik sobre las condiciones necesarias para la convergencia en media, resultan (3.52), (3.53), (3.54) y (3.55), como para el caso de un peso de Jacobi generalizado, sin parte singular. En cuanto a las desigualdades (3.56), se obtienen también repitiendo el argumento empleado en el teorema 1.15 para pesos de Jacobi generalizados, sin deltas de Dirac.

Según el resultado que acabamos de demostrar, en el caso de un peso de Jacobi generalizado la adición de una cantidad finita de deltas de Dirac en $[-1,1]$ no modifica el intervalo de convergencia en media, con pesos de esta misma clase. El siguiente paso puede ser preguntarse por la acotación débil o la débil restringida, en los extremos del intervalo de convergencia en media. Los resultados que conocemos para la parte absolutamente continua (véase el capítulo II) se refieren sólo a pesos de Jacobi. Por lo tanto, nos restringiremos a pesos de Jacobi más deltas de Dirac para el estudio de las acotaciones débil y débil restringida; o más exactamente, a pesos de la forma (3.37) con $\gamma_i = 0$ $\forall i$ (es decir, permitimos la presencia de la función h que aparece en los pesos de Jacobi generalizados). Sea desde ahora:

$$d\nu = w(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta_{a_i} \text{ sobre el intervalo } [-1,1],$$

con

$$w(x) = h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad (\alpha, \beta > -1)$$

y h una función continua y positiva en $[-1,1]$ y $\omega(h,\delta)\delta^{-1} \in L^1(0,2)$, siendo $\omega(h,\delta)$ el módulo de continuidad de h.

Asimismo, sea $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ si $x \neq a_i$ $\forall i$, $0 < u(a_i) < \infty$ $\forall i$ y sea $1 < p < \infty$.

Los resultados a los que nos referimos sobre acotación débil y débil restringida para pesos de Jacobi son los 2.9 a 2.17. En realidad, sus demostraciones se basan únicamente en que las sumas parciales S_n de la serie de Fourier se pueden expresar en la forma

$$S_n(f,x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,y) f(y) w(y)\,dy, \text{ donde:}$$

a) los núcleos K_n admiten la descomposición de Pollard, con la propiedad: $\lim_{n\to\infty} r_n = -1/2$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/2$;

b) los polinomios que aparecen en la descomposición de Pollard satisfacen la acotación: $|P_n(x)| \le C(1-x+\frac{1}{n^2})^{-(2\alpha+1)/4}(1+x+\frac{1}{n^2})^{-(2\beta+1)/4}$; y su correspondiente para los polinomios $\{Q_n\}$;

c) el teorema 1.11 y el lema 2.3 para los polinomios $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$;

d) otras condiciones sobre el peso w.

Si ahora llamamos $L_n(x,y)$ a los núcleos relativos a nuestra medida $d\nu$ y definimos, como en (3.26), los operadores

$$T_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} L_n(x,y) f(y) w(y)\,dy,$$

resulta que los núcleos L_n de estos operadores cumplen también a), b) y c). Por lo tanto, las mismas condiciones que antes sobre el peso w son necesarias para la acotación débil o suficientes para la débil restringida de los T_n, todo ello con el peso w. De acuerdo con el teorema 3.8, esas condiciones necesarias lo seguirán siendo para la acotación débil de la serie de Fourier S_n relativa a $d\nu$. Es decir, siguen siendo válidos los teoremas 2.9 y 2.10 y su corolario 2.11, que aquí reproducimos:

Teorema 3.17. *Con la notación precedente,* $1 < p < \infty$ *y* $\alpha, \beta \geq -1/2$*, no hay acotación débil* $\|uS_nf\|_{L^p_*(d\nu)} \leq C\|uf\|_{L^p(d\nu)}$ $\forall n \geq 0$ *en los extremos del intervalo de convergencia en media. Tampoco existe si* $u = 1$ *y* $\alpha, \beta > -1$.

En cuanto a la acotación débil restringida, habrá que comprobar que esas condiciones, que aseguran la acotación débil restringida de los T_n, bastan también para la acotación de los núcleos $L_n(x, a_i)$ que aparecen en el teorema 3.10 o la observación 3.11. Pero ello se va a deducir fácilmente de la proposición 3.15, como vemos seguidamente:

Proposición 3.18. *Con la notación anterior y* $1 < p < \infty$*, si se verifican las condiciones:*

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}, \tag{3.66}$$

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \leq \frac{\alpha+1}{2}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \leq \frac{\beta+1}{2}, \tag{3.67}$$

entonces existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\|u(x)^{-1}L_n(x, a_i)\|_{L^q_*(w)} \leq C \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall i. \tag{3.68}$$

Y si se cumplen:

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4}, \tag{3.69}$$

$$a + (\alpha+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq -\frac{\alpha+1}{2}, \qquad b + (\beta+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq -\frac{\beta+1}{2}, \tag{3.70}$$

entonces existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\|u(x)L_n(x, a_i)\|_{L^p_*(w)} \leq C \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall i. \tag{3.71}$$

Demostración:
a) Veamos la acotación (3.68). De acuerdo con la proposición 3.15,

$$|L_n(x, a_i)| \leq C(1 - x + n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4}(1 + x + n^{-2})^{-(2\beta+1)/4} \text{ si } a_i \neq \pm 1;$$

$$|L_n(x,1)| \le C(1+x+n^{-2})^{-(2\beta+1)/4} \text{ si en } 1 \text{ hay una delta de Dirac;}$$
$$|L_n(x,-1)| \le C(1-x+n^{-2})^{-(2\alpha+1)/4} \text{ si en } -1 \text{ hay una delta de Dirac.}$$

Por lo tanto, sólo hace falta probar la acotación:

$$\|(1-x+n^{-2})^{E_1}(1+x+n^{-2})^{E_{-1}}u(x)^{-1}\|_{L^q_*(w)} \le C \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.72}$$

donde o bien $E_1 = 0$, o bien $E_1 = -(2\alpha+1)/4$ y análogamente con E_{-1}. Procedemos de la misma manera que en el teorema 3.16: la expresión $(1-x+n^{-2})^{E_1}(1+x+n^{-2})^{E_{-1}}$ tiene como límite

$$(1-x)^{E_1}(1+x)^{E_{-1}}$$

y está acotada por otra expresión del mismo tipo:

$$(1-x)^{F_1}(1+x)^{F_{-1}},$$

donde o bien $F_1 = 0$, o bien $F_1 = -(2\alpha+1)/4$ y análogamente con F_{-1} (los valores de F_1 y F_{-1} dependen del signo de E_1 y E_{-1}, como en el teorema 3.16). Para poder aplicar el teorema de la convergencia dominada y seguidamente deducir (3.72), basta entonces con probar que

$$\|(1-x)^{E_1}(1+x)^{E_{-1}}u(x)^{-1}\|_{L^q_*(w)} \le C,$$

siempre que E_1 tome los citados valores 0, $-(2\alpha+1)/4$ y lo correspondiente con E_{-1}. Y para esto, es suficiente con probar las cuatro desigualdades:

$$\|(1-x)^{-(2\alpha+1)/4}(1-x)^{-a}\|_{L^q_*((1-x)^\alpha)} \le C; \tag{3.73}$$

$$\|(1-x)^{-a}\|_{L^q_*((1-x)^\alpha)} \le C; \tag{3.74}$$

$$\|(1+x)^{-(2\beta+1)/4}(1+x)^{-b}\|_{L^q_*((1+x)^\beta)} \le C; \tag{3.75}$$

$$\|(1+x)^{-b}\|_{L^q_*((1+x)^\beta)} \le C. \tag{3.76}$$

Ahora bien, como $1/p+1/q=1$, (3.67) equivale a:

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}) \le \frac{\alpha+1}{2}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}) \le \frac{\beta+1}{2},$$

es decir: $-aq+\alpha+1 \ge 0$, $-bq+\beta+1 \ge 0$. Por lo tanto, se cumplen (3.74) y (3.76).

En cuanto a (3.73), se verifica $\Leftrightarrow [-(2\alpha+1)/4-a]q+\alpha \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\alpha{+}1)/4{+}a{+}(\alpha{+}1)(-1/q) \leq 0 \Leftrightarrow (2\alpha{+}1)/4{+}a{+}(\alpha{+}1)(1/p{-}1) \leq 0 \Leftarrow$ (3.66);

de la misma manera, (3.66) $\Rightarrow$ (3.75).
La acotación (3.68) queda así demostrada.
b) La desigualdad (3.71) tiene la misma forma que (3.68), cambiando p por q y u por u^{-1} . Por consiguiente, se verifica si lo hacen las condiciones que se obtienen haciendo estos cambios en (3.73)-(3.76):

$$[-2(\alpha+1)/4+a]p+\alpha \geq -1; \tag{3.77}$$

$$ap+\alpha \geq -1; \tag{3.78}$$

$$[-2(\beta+1)/4+b]p+\beta \geq -1; \tag{3.79}$$

$$bp+\beta \geq -1. \tag{3.80}$$

Ahora es fácil ver que (3.78) y (3.80) equivalen a (3.70) y que (3.77) y (3.79) equivalen a (3.69), con lo que se tiene (3.71) y la proposición queda demostrada.

Por lo tanto, en virtud de lo anterior y de la observación 3.11, se verifican los análogos a los teoremas 2.13 y 2.16 y sus corolarios 2.14 y 2.17:

Teorema 3.19. *Sean $\alpha, \beta \geq -1/2$, $1 < p < \infty$. Si se verifican las desigualdades*

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4},$$

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(d\nu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\nu)} \ \forall n, \ \forall E \text{ medible.}$$

Corolario 3.20. *Sean $\alpha, \beta \geq -1/2$, $1 < p < \infty$. Si se verifican las desigualdades*

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4},$$

$$a+(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad b+(\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|uS_n(u^{-1}\chi_E)\|_{L^p_*(d\nu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\nu)} \ \forall n, \ \forall E \text{ medible.}$$

Teorema 3.21. *Sean $\alpha, \beta > -1$, $1 < p < \infty$. Si se verifican las desigualdades*

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) < \frac{1}{4},$$

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|S_n(\chi_E)\|_{L^p_*(d\nu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\nu)} \ \forall n, \ \forall E \text{ medible.}$$

Corolario 3.22. *Sean $\alpha, \beta > -1$, $1 < p < \infty$. Si se verifican las desigualdades*

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4},$$

$$(\alpha+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4}, \qquad (\beta+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) > -\frac{1}{4},$$

entonces existe una constante C tal que

$$\|S_n(\chi_E)\|_{L^p_*(d\nu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(d\nu)} \ \forall n, \ \forall E \text{ medible.}$$

§3. Pesos de Laguerre y de Hermite con una delta en el cero

Tres son los sistemas más estudiados tradicionalmente en la teoría de polinomios ortogonales. Uno de ellos es el de los polinomios de Jacobi, con sus casos particulares de Legendre ($\alpha = \beta = 0$), Chebyshev de primera ($\alpha = \beta = -1/2$) y de segunda especie ($\alpha = \beta = 1/2$) y ultraesféricos o de Gegenbauer ($\alpha = \beta$). A una clase más amplia, la de los polinomios de Jacobi generalizados, hemos dedicado el apartado segundo de este capítulo. Los otros dos sistemas clásicos de polinomios ortogonales son los de Laguerre y Hermite y a estos es a los que nos vamos a referir a continuación.

Comencemos por el primero de ellos. α será un número real mayor que -1, $w(x) = e^{-x}x^{\alpha}$ $\forall x > 0$ y $d\mu(x) = w(x)\,dx$ sobre $[0, +\infty)$. Como ya vimos, los polinomios de Laguerre se definen como los polinomios $L_n^{\alpha}(x)$ ortogonales con respecto a la medida $d\mu$, con $L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$. Estos polinomios no están normalizados, sino que

$$\|L_n^{\alpha}(x)\|^2_{L^2(d\mu)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

La acotación en media con pesos de las sumas parciales de la serie de Fourier con respecto a los polinomios de Laguerre (normalizados) fue estudiada por Muckenhoupt en [Mu 2] y [Mu 3], para pesos u y v definidos de la siguiente manera:

$$u(x) = w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{a}(1+x)^{b}, \tag{3.81}$$

$$v(x) = w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{A}(1+x)^{B}(1+\log^{+} x)^{\beta},$$

$\forall x > 0$, donde $\log^{+} x = \text{máx}\{\log x, 0\}$ y

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } b = B \text{ y } p = 4 \text{ ó } 4/3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En esta situación, se tiene $\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \le C\|vf\|_{L^p(d\mu)}$ $\forall f, \forall n$ si se cumplen ciertas condiciones [(1.24),..., (1.30)], que ya vimos en el primer capítulo.

Nuestro objetivo es ahora aplicar los resultados de la primera parte de este capítulo a la medida $d\mu(x) = e^{-x}x^{\alpha}\,dx$ sobre $[0, +\infty)$. Para ello, necesitamos conocer propiedades de los polinomios ortonormales con respecto a medidas $(x - a)^2\,d\mu$, donde a es un punto en el que se añade una masa. Mientras que con los pesos de Jacobi generalizados cualquiera de estas modificaciones por $(x - a)^2$ produce un nuevo peso de la misma clase, en el caso de los de Laguerre nos vemos forzados a imponer $a = 0$; es decir, a añadir una delta de Dirac en el único punto singular del peso: el cero. En resumen, vamos a estudiar la convergencia en media para la medida $d\nu(x) = e^{-x}x^\alpha\, dx + M\delta_0(x)$ en $[0, +\infty)$.

Siguiendo la notación de todo este capítulo, denotaremos por $L_n(x, y)$ los núcleos relativos a $d\nu$. Recordemos que $L_n^\alpha(x)$ indica el polinomio de Laguerre de grado n. $P_n^\alpha(x)$ será el polinomio $L_n^\alpha(x)$ normalizado y, como ya se hizo en el capítulo I, $\mathcal{L}_n^\alpha(x) = P_n^\alpha(x)w^{1/2} = P_n^\alpha(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}$.

Como en el apartado anterior, todo lo que debemos hacer es encontrar cotas para las normas de los núcleos $L_n(x, 0)$ relativos a $d\nu$. Esto va a ser posible gracias a que $L_n(x, 0)$ es, salvo un factor constante, igual a $P_n^{\alpha+1}(x)$:

Lema 3.23. *Con la notación anterior, se tiene:*

$$L_n(x, 0) = r_n P_n^{\alpha+1}(x), \ \text{donde } r_n \sim n^{-(\alpha+1)/2}.$$

Demostración:
Según hemos visto, $L_n^\alpha(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$ y $\|L_n^\alpha(x)\|^2_{L^2(d\mu)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$. Por lo tanto,

$$P_n^\alpha(0) = \left[\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right]^{1/2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right]^{1/2}.$$

Utilizando ahora la fórmula de Stirling,

$$P_n^\alpha(0)^2 \sim \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \sim \frac{(n+\alpha)^{n+\alpha}e^{-n-\alpha}\sqrt{2\pi}\sqrt{n+\alpha}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} =$$

$$= (1 + \frac{\alpha}{n})^{n+1/2}(n+\alpha)^\alpha e^{-\alpha} \sim n^\alpha.$$

Llamemos $\{K_n(x, y)\}$ a la sucesión de los núcleos de $d\mu$. Entonces, si R es un polinomio de grado no mayor que n, se tiene:

$$\int_0^{+\infty} K_n(x, y)R(x)\, d\mu(x) = R(y);$$

luego si R es un polinomio de grado menor que n,

$$\int_0^{+\infty} K_n(x, 0)R(x)x\, d\mu(x) = 0.$$

Por lo tanto, $K_n(x, 0)$ es, salvo un factor constante, el polinomio ortonormal de grado n de la medida $x\, d\mu(x) = e^{-x}x^{\alpha+1}\, dx$ sobre $[0, +\infty)$, es decir: $K_n(x, 0) = s_n P_n^{\alpha+1}(x)$. Haciendo $x = 0$,

$$s_n = \frac{K_n(0, 0)}{P_n^{\alpha+1}(0)}.$$

Y usando la fórmula (3.15) con $a = 0$, $y = 0$, resulta

$$L_n(x,0) = \frac{1}{1 + MK_n(0,0)} K_n(x,0) = \frac{K_n(0,0)}{1 + MK_n(0,0)} \frac{1}{P_n^{\alpha+1}(0)} P_n^{\alpha+1}(x);$$

finalmente,

$$r_n = \frac{K_n(0,0)}{1 + MK_n(0,0)} \frac{1}{P_n^{\alpha+1}(0)} \sim \frac{1}{P_n^{\alpha+1}(0)} \sim n^{-(\alpha+1)/2},$$

con lo que el lema queda demostrado.

Usando ahora las estimaciones conocidas para los polinomios de Laguerre, podemos encontrar condiciones que nos garanticen las acotaciones en norma de los núcleos $L_n(x,0)$ que necesitamos para aplicar el teorema 3.8.

Proposición 3.24. *Sea $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sea v definida como*

$$v(x) = w(x)^{1/2-1/p} \left(\frac{x}{1+x}\right)^A (1+x)^B (1 + \log^+ x)^\beta \ \forall x > 0,$$

donde $\beta = 0$ ó 1. Si se verifican las condiciones:

$$A < 1 - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{2},$$

$$B > \frac{1}{4} - \frac{1}{p}$$

y

$$B \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{3p},$$

entonces existe $C > 0$ tal que $\|L_n(x,0)\|_{L^q(v^{-q}w)} \leq C \ \forall n$.

Demostración:
De acuerdo con el lema y si por L^q indicamos $L^q(\mathbb{R}^+, dx)$, resulta:

$$\|L_n(x,0)\|_{L^q(v^{-q}w)} \sim n^{-(\alpha+1)/2} \|P_n^{\alpha+1} v^{-1} w^{1/q}\|_{L^q} =$$

$$= n^{-(\alpha+1)/2} \|(xw)^{1/2} P_n^{\alpha+1} x^{-1/2} v^{-1} w^{1/2-1/p}\|_{L^q} =$$

$$= n^{-(\alpha+1)/2} \|x^{-1/2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-A} (1+x)^{-B} (1 + \log^+ x)^{-\beta} \mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)\|_{L^q} =$$

$$= n^{-(\alpha+1)/2} \| \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-A-1/2} (1+x)^{-B-1/2} (1 + \log^+ x)^{-\beta} \mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)\|_{L^q}.$$

Hay que probar, por lo tanto, que

$$(3.82)\quad n^{-q\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^{+\infty}\left(\tfrac{x}{1+x}\right)^{-q(A+\frac12)}(1+x)^{-q(B+\frac12)}(1+\log^+x)^{-q\beta}|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|^q\,dx<C.$$

Observemos que, por ser $\beta\geq 0$, $(1+\log^+x)^{-q\beta}\leq 1$, lo que emplearemos repetidamente. Para demostrar esta acotación, utilizamos la tabla de Muckenhoupt que ya vimos en el primer capítulo: existen constantes positivas C y γ tales que $\forall n$

$$(3.83)\qquad 0\leq x\leq 1/\sigma\Rightarrow|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|\leq C\sigma^{(\alpha+1)/2}x^{(\alpha+1)/2};$$

$$(3.84)\qquad 1/\sigma<x\leq\sigma/2\Rightarrow|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|\leq C\sigma^{-1/4}x^{-1/4};$$

$$(3.85)\qquad \sigma/2\leq x\leq 3\sigma/2\Rightarrow|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|\leq C\sigma^{-1/4}(\sigma^{1/3}+|x-\sigma|)^{-1/4};$$

$$(3.86)\qquad 3\sigma/2\leq x\Rightarrow|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|\leq Ce^{-\gamma x},$$

donde $\sigma=4n+2\alpha+4$ (luego $\sigma\sim n$). Vamos a estudiar la integral en cada uno de los intervalos $(0,1/\sigma)$, $(1/\sigma,1)$, $(1,\sigma/2)$, $(\sigma/2,3\sigma/2)$ y $(3\sigma/2,+\infty)$.
a) De acuerdo con (3.83) y por ser $1+x\sim 1$ en $(0,1/\sigma)$ y $(1+\log^+x)^{-q\beta}\leq 1$,

$$n^{-q(\alpha+1)/2}\int_0^{1/\sigma}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-q(A+1/2)}(1+x)^{-q(B+1/2)}(1+\log^+x)^{-q\beta}|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|^q\,dx\leq$$
$$\leq Cn^{-q(\alpha+1)/2}\int_0^{1/\sigma}x^{-q(A+1/2)+q(\alpha+1)/2}\sigma^{q(\gamma+1)/2}\,dx\leq C\int_0^{1/\sigma}x^{q(\alpha/2-A)}\,dx;$$

como $q(\alpha/2-A)>-1\Leftrightarrow\alpha/2-A>1/p-1\Leftrightarrow A<1-1/p+\alpha/2$, lo que se cumple por hipótesis, esta última integral resulta convergente y por lo tanto acotada, ya que $1/\sigma\leq C$.
b) Usando ahora (3.84),

$$n^{-q(\alpha+1)/2}\int_{1/\sigma}^{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-q(A+1/2)}(1+x)^{-q(B+1/2)}(1+\log^+x)^{-q\beta}|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|^q\,dx\leq$$
$$\leq Cn^{-q(\alpha+1)/2}\int_{1/\sigma}^{1}x^{-q(A+1/2)-q/4}\sigma^{-q/4}\,dx\leq Cn^{-q(\alpha/2+3/4)}\int_{1/\sigma}^{1}x^{-q(A+3/4)}\,dx;$$

teniendo en cuenta que $\int_{1/\sigma}^1 x^{-q(A+3/4)}\,dx\leq$

$$\leq\begin{cases}C & \text{si } -q(A+3/4)>-1,\\ C\log\sigma & \text{si } -q(A+3/4)=-1,\\ C\sigma^{q(A+3/4)-1} & \text{si } -q(A+3/4)<-1,\end{cases}$$

resulta:

$$Cn^{-q(\alpha/2+3/4)}\int_{1/\sigma}^{1} x^{-q(A+3/4)}\,dx \leq$$

$$\leq \begin{cases} Cn^{-q(\alpha/2+3/4)} & \text{si } -q(A+3/4) > -1, \\ Cn^{-q(\alpha/2+3/4)}\log n & \text{si } -q(A+3/4) = -1, \\ Cn^{q(A-\alpha/2)-1} & \text{si } -q(A+3/4) < -1 \end{cases}$$

y por consiguiente sólo hace falta ver que $-q(\alpha/2+3/4)$ y $q(A-\alpha/2)-1$ son negativos. El primero sí lo es, puesto que $\alpha > -1$; en cuanto al segundo valor:

$$q(A-\alpha/2)-1<0 \Leftrightarrow A-\alpha/2+1/p-1<0 \Leftrightarrow A<1-1/p+\alpha/2,$$

lo que, por hipótesis, es cierto.
c) Cuando $1 \leq x$, $x \sim 1+x$, así es que en $(1,\sigma/2)$ podemos acotar la integral (3.82) del siguiente modo, usando (3.84):

$$n^{-q(\alpha+1)/2}\int_1^{\sigma/2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-q(A+1/2)}(1+x)^{-q(B+1/2)}(1+\log^+ x)^{-q\beta}|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|^q\,dx \leq$$

$$\leq Cn^{-q(\alpha+1)/2}\int_1^{\sigma/2} x^{-q(B+1/2)-q/4}\sigma^{-q/4}\,dx = Cn^{-q(\alpha/2+3/4)}\int_1^{\sigma/2} x^{-q(B+3/4)}\,dx;$$

como

$$\int_1^{\sigma/2} x^{-q(B+3/4)}\,dx \leq \begin{cases} C & \text{si } -q(B+3/4) < -1, \\ C\log\sigma & \text{si } -q(B+3/4) = -1, \\ C\sigma^{-q(B+3/4)+1} & \text{si } -q(B+3/4) > -1, \end{cases}$$

resulta:

$$n^{-q(\alpha/2+3/4)}\int_1^{\sigma/2} x^{-q(B+3/4)}\,dx \leq$$

$$\leq \begin{cases} Cn^{-q(\alpha/2+3/4)} & \text{si } -q(B+3/4) < -1, \\ Cn^{-q(\alpha/2+3/4)}\log n & \text{si } -q(B+3/4) = -1, \\ Cn^{-q(B+\alpha/2+3/2)+1} & \text{si } -q(B+3/4) > -1, \end{cases}$$

con lo que basta con comprobar que $q(\alpha/2+3/4)$ es positivo y que $q(B+\alpha/2+3/2)-1$ es no negativo. Lo primero es inmediato, porque $\alpha > -1$; lo segundo:

$$q(B+\alpha/2+3/2)-1 \geq 0 \Leftrightarrow B+\alpha/2+3/2+1/p-1 \geq 0 \Leftrightarrow B \geq -(\alpha+1)/2-1/p,$$

lo que es cierto, porque $B > 1/4-1/p$ y $1/4 > 0 > -(\alpha+1)/2$.

d) En el intervalo $(\sigma/2, 3\sigma/2)$ disponemos de la acotación (3.85); como $1+x \sim x \sim \sigma \sim n$ y $1+\log^+ x = 1+\log x \sim \log x \sim \log\sigma \sim \log n$, se tiene:

$$n^{-q(\alpha+1)/2} \int_{\sigma/2}^{3\sigma/2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-q(A+1/2)} (1+x)^{-q(B+1/2)} (1+\log^+ x)^{-q\beta} |\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|^q \, dx \leq$$

$$\leq C n^{-q(\alpha+1)/2} \int_{\sigma/2}^{3\sigma/2} x^{-q(B+1/2)} \sigma^{-q/4} (\sigma^{1/3} + |x-\sigma|)^{-q/4} (\log x)^{-q\beta} \, dx \leq$$

$$\leq C n^{-q(B+\alpha/2+5/4)} (\log n)^{-q\beta} \int_{\sigma/2}^{3\sigma/2} (\sigma^{1/3} + |x-\sigma|)^{-q/4} \, dx =$$

(haciendo el cambio $y = (x-\sigma)/\sigma$)

$$= C n^{-q(B+\alpha/2+5/4)} (\log n)^{-q\beta} \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma^{1/3} + \sigma|y|)^{-q/4} \sigma dy \leq$$

$$\leq C n^{-q(B+\alpha/2+5/4)+1} (\log n)^{-q\beta} \int_0^{1/2} (\sigma^{1/3} + \sigma y)^{-q/4} \, dy.$$

Podemos calcular esta integral según el valor de q:
Si $q < 4$, $-q/4 > -1$, luego

$$\int_0^{1/2} (\sigma^{1/3} + \sigma y)^{-q/4} \, dy = C \left[\sigma^{-1} (\sigma^{1/3} + \sigma y)^{-q/4+1}\right]_0^{1/2} =$$

$$= C\sigma^{-1} \left[(\sigma^{1/3} + \sigma/2)^{-q/4+1} - (\sigma^{1/3})^{-q/4+1}\right] \sim C\sigma^{-1}\sigma^{-q/4+1} \sim n^{-q/4},$$

ya que $(\sigma^{1/3} + \sigma/2)^{-q/4+1} \sim \sigma^{-q/4+1}$, de mayor orden que $(\sigma^{1/3})^{-q/4+1}$.
Si $q > 4$, $-q/4 < -1$, luego

$$\int_0^{1/2} (\sigma^{1/3} + \sigma y)^{-q/4} \, dy = C \left[-\sigma^{-1} (\sigma^{1/3} + \sigma y)^{-q/4+1}\right]_0^{1/2} =$$

$$= C\sigma^{-1} \left[(\sigma^{1/3})^{-q/4+1} - (\sigma^{1/3} + \sigma/2)^{-q/4+1}\right] \sim C\sigma^{-1}\sigma^{(-q/4+1)/3} \sim n^{-q/12-2/3},$$

porque $(\sigma^{1/3} + \sigma/2)^{-q/4+1} \sim \sigma^{-q/4+1}$, de menor orden que $(\sigma^{1/3})^{-q/4+1}$.
Si $q = 4$, entonces

$$\int_0^{1/2} (\sigma^{1/3} + \sigma y)^{-q/4} \, dy = \left[\sigma^{-1} \log(\sigma^{1/3} + \sigma y)\right]_0^{1/2} =$$

$$= \sigma^{-1} \log \frac{\sigma^{1/3} + \sigma/2}{\sigma^{1/3}} \sim C\sigma^{-1} \log\sigma \sim n^{-1} \log n.$$

Por lo tanto, $n^{-q(B+\alpha/2+5/4)+1}(\log n)^{-q\beta}\int_0^{1/2}(\sigma^{1/3}+\sigma y)^{-q/4}\,dy \le$

$$\le \begin{cases} Cn^{-q(B+\alpha/2+3/2)+1}(\log n)^{-q\beta} & \text{si } q<4 \ (\Leftrightarrow p>4/3), \\ Cn^{-q(B+\alpha/2+5/4)}(\log n)^{1-q\beta} & \text{si } q=4 \ (\Leftrightarrow p=4/3), \\ Cn^{-q(B+\alpha/2+4/3)+1/3}(\log n)^{-q\beta} & \text{si } q>4 \ (\Leftrightarrow p<4/3), \end{cases}$$

con lo que basta probar:

$$\begin{cases} -q(B+\alpha/2+3/2)+1\le 0 & \text{si } p>4/3, \\ -q(B+\alpha/2+5/4)<0 & \text{si } p=4/3, \\ -q(B+\alpha/2+4/3)+1/3\le 0 & \text{si } p<4/3 \end{cases}$$

Las tres desigualdades se cumplen:

$$-q(B+\alpha/2+3/2)+1\le 0 \Leftrightarrow B+\alpha/2+3/2+1/p-1\ge 0 \Leftrightarrow B\ge -(\alpha+1)/2-1/p,$$

lo que es cierto, porque $B>1/4-1/p$ y $1/4>0>-(\alpha+1)/2$;
si $p=4/3$,

$$-q(B+\alpha/2+5/4)<0 \Leftrightarrow B+\alpha/2+1/2+3/4>0 \Leftrightarrow B>-(\alpha+1)/2-1/p,$$

lo que es cierto, como la anterior;

$$-q(B+\alpha/2+4/3)+1/3\le 0 \Leftrightarrow B+\alpha/2+4/3+1/(3p)-1/3\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\ge -(\alpha/2+3/4)-1/4-1/(3p),$$

lo que también se cumple, ya que $B\ge -1/4-1/(3p)$ y $0>-(\alpha/2+3/4)$;
e) el último intervalo que nos queda es $(3\sigma/2,+\infty)$. En él tenemos la cota (3.86): $|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|\le Ce^{-\gamma x}$. Puesto que $1+x\sim x$, tenemos:

$$n^{-q(\alpha+1)/2}\int_{3\sigma/2}^{+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-q(A+1/2)}(1+x)^{-q(B+1/2)}(1+\log^+ x)^{-q\beta}|\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x)|^q\,dx\le$$

$$\le Cn^{-q\frac{\alpha+1}{2}}\int_{3\sigma/2}^{+\infty}x^{-q(B+1/2)}e^{-\gamma qx}\,dx\le Cn^{-q\frac{\alpha+1}{2}}\int_1^{+\infty}x^{-q(B+1/2)}e^{-\gamma qx}\,dx\le C,$$

ya que la integral es convergente y $-q(\alpha+1)/2<0$.
Con esto, queda demostrada la proposición.

Para la norma $\|L_n(x,0)\|_{L^p(u^p w)}$ tenemos el resultado análogo:

Corolario 3.25. *Sea $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sea u definida como*

$$u(x) = w(x)^{1/2-1/p} \left(\frac{x}{1+x} \right)^a (1+x)^b \ \forall x > 0;$$

Si se verifican las condiciones:

$$a > -\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2},$$

$$b < \frac{3}{4} - \frac{1}{p}$$

y

$$b \leq \frac{7}{12} - \frac{1}{3p},$$

entonces existe $C > 0$ tal que $\|L_n(x,0)\|_{L^p(u^p w)} \leq C \ \forall n$.

Demostración:
Se trata de estudiar la acotación de

$$\|L_n(x,0)\|_{L^p(u^p w)} = \|L_n(x,0)\|_{L^p((u^{-1})^{-p} w)};$$

como $1/p + 1/q = 1$, $1/p - 1/2 = 1/2 - 1/q$, así es que:

$$u(x)^{-1} = w(x)^{1/2-1/q} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{-a} (1+x)^{-b} \ \forall x > 0;$$

luego sustituyendo p por q, A por $-a$ y B por $-b$ y haciendo $\beta = 0$ en la proposición anterior, dicha acotación se verifica cuando:

$$-a < 1 - \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{2},$$

$$-b > \frac{1}{4} - \frac{1}{q}$$

y

$$-b \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{3q},$$

Pero estas condiciones equivalen a las de la hipótesis:

$$-a < 1 - 1/q + \alpha/2 \Leftrightarrow -a < 1/p + \alpha/2 \Leftrightarrow a > -1/p - \alpha/2;$$

$$-b > 1/4 - 1/q \Leftrightarrow -b > 1/4 + 1/p - 1 \Leftrightarrow b < 3/4 - 1/p;$$

$$-b > -1/4 - 1/(3q) \Leftrightarrow -b > -1/4 + 1/(3p) - 1/3 \Leftrightarrow b < 7/12 - 1/(3p);$$

Y el corolario está probado.

Una vez estudiadas las normas de los núcleos, podemos analizar la convergencia de la serie de Fourier relativa a $d\nu(x) = d\mu(x) + M\delta_0(x)$. Para la medida $d\mu$, el resultado de Muckenhoupt ([Mu 3]) afirma que si u y v son dos pesos de la forma (3.81), se cumple la acotación $\|uS_nf\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)}$ $\forall f$, $\forall n$ si se verifican las condiciones:

$$a > -\frac{1}{p} + \max\{-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}\}; \tag{3.87}$$

$$A < 1 - \frac{1}{p} - \max\{-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}\}; \tag{3.88}$$

$$A \leq a; \tag{3.89}$$

$$\begin{cases} b < \frac{3}{4} - \frac{1}{p}; \\ b \leq \frac{7}{12} - \frac{1}{3p}; \end{cases} \tag{3.90}$$

$$\begin{cases} B \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{3p}; \\ B > \frac{1}{4} - \frac{1}{p}; \end{cases} \tag{3.91}$$

$$\begin{cases} b \leq B + \frac{1}{2} - \frac{2}{3p}; \\ b \leq B; \\ b \leq B - \frac{1}{6} + \frac{2}{3p}; \end{cases} \tag{3.92}$$

(3.93)
si en (3.92) se da alguna igualdad, entonces no se da en (3.90) ni en (3.91).

Además, todas las condiciones son necesarias, con la posible excepción de que en (3.91) se tenga la igualdad $B = \frac{1}{4} - \frac{1}{p}$ cuando $p = 4$ o $p = 4/3$ y $b = B$.

Las mismas bastan también para la acotación de la serie de Fourier con respecto a $d\nu$:

Teorema 3.26. *Sea S_n la suma parcial enésima de la serie de Fourier de los polinomios ortonormales relativos a $d\nu = w(x)\,dx + M\delta_0(x)$ sobre $[0, +\infty)$, $w(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$. Sean $1 < p < +\infty$ y u y v de la forma (3.81), con $0 < u(0) < +\infty$, $0 < v(0) < +\infty$. Si se cumplen las condiciones (3.87)-(3.93), entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|uS_nf\|_{L^p(d\nu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\nu)}\ \forall f,\ \forall n.$$

Demostración:
Denotemos por s_n la serie de Fourier correspondiente al peso $w(x)\,dx$ (es decir, la de los polinomios de Laguerre de índice α) y por s_n^0 la de $x^2w(x)\,dx$ (es decir, la de los polinomios de Laguerre de índice $\alpha+2$). Según el teorema 3.8 y la proposición 3.12, basta comprobar lo siguiente:

a) $\|us_nf\|_{L^p(w)} \le C\|vf\|_{L^p(w)}$ $\forall f$, $\forall n$;

b) $\|x^{1-2/p}us_n^0f\|_{L^p(x^2w)} \le C\|x^{1-2/p}vf\|_{L^p(x^2w)}$ $\forall f$, $\forall n$;

c) $\|L_n(x,0)\|_{L^q(v^{-q}w)} \le C$ $\forall n$;

d) $\|L_n(x,0)\|_{L^p(u^pw)} \le C$ $\forall n$.

Veamos cada una de las acotaciones:
a) Se cumple, puesto que es el resultado clásico de Muckenhoupt.
b) Es también una acotación de la serie de Fourier para un peso de Laguerre, pero ahora con índice $\alpha+2$ y pesos $u_0(x) = x^{1-2/p}u(x)$ y $v_0(x) = x^{1-2/p}v(x)$. Veamos entonces si se verifican las condiciones correspondientes a (3.87)-(3.93) para este caso. Antes de nada, debemos expresar u_0 y v_0 en la forma análoga a (3.81):

$$u_0(x) = x^{1-2/p}u(x) = x^{1-2/p}w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^a(1+x)^b =$$

$$= [x^2w(x)]^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^a(1+x)^b;$$

$$v_0(x) = x^{1-2/p}v(x) = x^{1-2/p}w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^A(1+x)^B(1+\log^+ x)^\beta =$$

$$= [x^2w(x)]^{1/2-1/p}\left(\frac{x}{1+x}\right)^A(1+x)^B(1+\log^+ x)^\beta.$$

Por lo tanto, deben cumplirse (3.87)-(3.93) con las mismas a, b, A y B y con $\alpha+2$ en lugar de α. De esta manera, sólo hace falta comprobar las análogas a (3.87) y (3.88), es decir:

$$a > -\frac{1}{p} + \max\{-\frac{\alpha+2}{2}, \frac{1}{4}\}$$

y

$$A < 1 - \frac{1}{p} - \max\{-\frac{\alpha+2}{2}, \frac{1}{4}\};$$

pero es inmediato ver que (3.87) y (3.88) implican estas desigualdades.
c) Esta acotación se cumple, porque (3.88) y (3.91) implican las hipótesis de la proposición 3.24.
d) También se cumple, por (3.87), (3.90) y el corolario 3.25.
Con esto, el teorema queda demostrado.

Una vez que hemos estudiado la convergencia de la serie de Fourier para pesos de Laguerre con una delta de Dirac en el origen, podemos trasladar sin ninguna dificultad el mismo resultado al caso de pesos de Hermite generalizados, es decir, pesos sobre toda la recta real de la forma $w(x) = e^{-x^2}|x|^{2\alpha}$, donde $\alpha > -1/2$ (los polinomios de Hermite clásicos corresponden a $\alpha = 0$). Sea a partir de ahora w este peso y sea $d\mu(x) = w(x)\,dx$ sobre $\mathbb{R}$. El estudio de la serie de Fourier con respecto a los polinomios ortonormales de $d\mu$ fue realizado por Varona (véase [V]), relacionándola con la serie de Fourier para pesos de Laguerre; el resultado es el siguiente: sea $S_n f$ la suma parcial enésima de la serie de Fourier y sean

$$u(x) = w(x)^{1/2-1/p} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{a} (1+|x|)^{b}, \tag{3.94}$$

$$v(x) = w(x)^{1/2-1/p} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{A} (1+|x|)^{B} (1+\log^{+}|x|)^{\beta},$$

$\forall x \neq 0$, donde

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } b = B \text{ y } p = 4 \text{ ó } 4/3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En esta situación, se tiene $\|uS_n f\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\mu)}$ $\forall f$, $\forall n$ si se cumplen las condiciones

$$a > -\frac{1}{p} + \max\{-\alpha, 0\}; \tag{3.95}$$

$$A < 1 - \frac{1}{p} - \max\{-\alpha, 0\}; \tag{3.96}$$

$$A \leq a; \tag{3.97}$$

$$\begin{cases} b < 1 - \frac{1}{p}; \\ b \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3p}; \end{cases} \tag{3.98}$$

$$\begin{cases} B \geq -1 + \frac{1}{3p}; \\ B > -\frac{1}{p}; \end{cases} \tag{3.99}$$

$$\begin{cases} b \leq B + 1 - \frac{4}{3p}; \\ b \leq B; \\ b \leq B - \frac{1}{3} + \frac{4}{3p}; \end{cases} \tag{3.100}$$

(3.101)
si en (3.100) se da alguna igualdad, entonces no se da en (3.98) ni en (3.99).

Además, todas las condiciones son necesarias, con la posible excepción de que en (3.99) se tenga la igualdad $B = -\frac{1}{p}$ cuando $p = 4$ o $p = 4/3$ y $\beta = 1$.

Consideremos entonces la medida que resulta de añadir a $d\mu$ una delta en el origen: $d\nu(x) = d\mu(x) + M\delta_0(x) = e^{-x^2}|x|^{2\alpha}\,dx + M\delta_0(x)$. Sean $J_n^\alpha(x,y)$ los núcleos de $d\nu(x)$ y $L_n^\alpha(x,y)$ los de la medida $e^{-x}x^\alpha\,dx + M\delta_0(x)$ sobre $[0,+\infty)$, que hemos tratado anteriormente en este apartado (es conveniente introducir el índice α en la notación, por lo que sigue). La siguiente propiedad nos permite aplicar el estudio hecho para medidas de Laguerre a medidas de Hermite generalizadas:

Proposición 3.27. *Con la notación precedente,*

$$J_{2n}^\alpha(x,0) = J_{2n+1}^\alpha(x,0) = L_n^{\alpha-1/2}(x^2,0)\ \forall n.$$

Demostración:
Los núcleos $J_n^\alpha(x,y)$ lo son de la medida $d\nu(x) = e^{-x^2}|x|^{2\alpha}\,dx + M\delta_0(x)$, que es par; luego los polinomios ortonormales Q_n con respecto a $d\nu$ son pares o impares, según su grado, como se vio en la proposición 1.7. Es decir:

$$Q_{2n}(x) = R_n(x^2), \qquad Q_{2n+1}(x) = xS_n(x^2),$$

con R_n y S_n polinomios de grado n. Puesto que $J_n^\alpha(x,0) = \sum_{k=0}^n Q_k(x)Q_k(0)$, resulta $J_{2n}^\alpha(x,0) = J_{2n+1}^\alpha(x,0) = F_n(x^2)$, para ciertos polinomios F_n de grado n. Sólo falta probar que $F_n(x) = L_n^{\alpha-1/2}(x,0)\ \forall n$. Y esto equivale, de acuerdo con la proposición 1.9, a que para cualquier polinomio R de grado menor o igual que n,

$$R(0) = \int_0^{+\infty} F_n(x)R(x)[e^{-x}x^{\alpha-1/2}\,dx + M\delta_0(x)].$$

Ahora bien, puesto que $F_n(x^2) = J_{2n}^\alpha(x,0)$ y este es el núcleo de $d\nu$ y $R(x^2)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n$, se tiene:

$$\begin{aligned}
R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x^2)R(x^2)d\nu(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x^2)R(x^2)[e^{-x^2}|x|^{2\alpha}\,dx + M\delta_0(x)] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x^2)R(x^2)e^{-x^2}|x|^{2\alpha}\,dx + MF_n(0)R(0) = \\
&= 2\int_0^{+\infty} F_n(x^2)R(x^2)e^{-x^2}x^{2\alpha}\,dx + MF_n(0)R(0) = \\
&= \int_0^{+\infty} F_n(y)R(y)e^{-y}y^\alpha y^{-1/2}\,dy + MF_n(0)R(0) = \\
&= \int_0^{+\infty} F_n(y)R(y)[e^{-y}y^{\alpha-1/2}dy + M\delta_0(y)],
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

De esta manera, la acotación de los núcleos $L_n^{\alpha-1/2}(x,0)$ implica la de los $J_n^\alpha(x,0)$:

Proposición 3.28. *Sea v un peso definido según (3.94). Si se cumplen las desigualdades*

$$A < 1 - \frac{1}{p} + \alpha,$$

$$B > -\frac{1}{p}$$

y

$$B \geq -1 + \frac{1}{3p},$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \geq 0$

$$\|J_n^\alpha(x,0)\|_{L^q(v^{-q}w)} \leq C.$$

<u>Demostración</u>:
En virtud de la proposición anterior, hay que demostrar que

$$\|L_n^{\alpha-1/2}(x^2,0)\|_{L^q(v^{-q}w)} < C \ \forall n.$$

Es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |L_n^{\alpha-1/2}(x^2,0)|^q v(x)^{-q} w(x)\, dx < C.$$

O bien:

$$\int_0^{+\infty} |L_n^{\alpha-1/2}(y,0)|^q v(y^{1/2})^{-q} w(y^{1/2}) y^{-1/2}\, dy < C.$$

Ahora bien, como $w(x) = e^{-x^2}|x|^{2\alpha}$, $w(y^{1/2})y^{-1/2} = e^{-y}y^{\alpha-1/2}$; y los núcleos $L_n^{\alpha-1/2}(y,0)$ lo son precisamente de $e^{-y}y^{\alpha-1/2}dy + M\delta_0(y)$. Por otra parte,

$$v(x) = w(x)^{1/2-1/p}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^A (1+|x|)^B (1+\log^+|x|)^\beta,$$

luego

$$v(y^{1/2}) = (e^{-y}y^\alpha)^{1/2-1/p}\left(\frac{y^{1/2}}{1+y^{1/2}}\right)^A (1+y^{1/2})^B (1+\log^+(y^{1/2}))^\beta;$$

es inmediato comprobar que $1 + y^{1/2} \sim (1+y)^{1/2}$ en $(0,+\infty)$; asimismo, $1 + \log^+(y^{1/2}) \sim 1 + \log^+ y$; por lo tanto,

$$v(y^{1/2}) \sim (e^{-y}y^\alpha)^{1/2-1/p}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{A/2} (1+y)^{B/2}(1+\log^+ y)^\beta =$$

$$= (e^{-y}y^{\alpha-1/2})^{1/2-1/p}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{A/2+1/4-1/(2p)}(1+y)^{B/2+1/4-1/(2p)}(1+\log^+ y)^\beta.$$

De esto se deduce que

$$\int_0^{+\infty} |L_n^{\alpha-1/2}(y,0)|^q v(y^{1/2})^{-q} w(y^{1/2}) y^{-1/2}\, dy < C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |L_n^{\alpha-1/2}(y,0)|^q v_0(y)^{-q} e^{-y} y^{\alpha-1/2} dy < C,$$

donde

$$v_0(y) = (e^{-y}y^{\alpha-1/2})^{1/2-1/p}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{A/2+1/4-1/(2p)}(1+y)^{B/2+1/4-1/(2p)}(1+\log^+ y)^\beta.$$

Pero esta última acotación está expresada en los términos de la proposición 3.24, cambiando α por $\alpha - 1/2$, A por $A/2 + 1/4 - 1/(2p)$ y B por $B/2 + 1/4 - 1/(2p)$. Luego será cierta si se cumplen las desigualdades:

$$A/2 + 1/4 - 1/(2p) < 1 - 1/p + (\alpha - 1/2)/2;$$

$$B/2 + 1/4 - 1/(2p) > 1/4 - 1/p;$$

$$B/2 + 1/4 - 1/(2p) \geq -1/4 - 1/(3p).$$

Pero estas equivalen a las del enunciado:

$$A/2 + 1/4 - 1/(2p) < 1 - 1/p + (\alpha - 1/2)/2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A + 1/2 - 1/p < 2 - 2/p + \alpha - 1/2 \Leftrightarrow A < 1 - 1/p + \alpha;$$

$$B/2 + 1/4 - 1/(2p) > 1/4 - 1/p \Leftrightarrow B - 1/p > -2/p \Leftrightarrow B > -1/p;$$

$$B/2 + 1/4 - 1/(2p) \geq -1/4 - 1/(3p) \Leftrightarrow B + 1/2 - 1/p \geq -1/2 - 2/(3p) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B \geq -1 + 1/(3p).$$

Con esto, la proposición queda demostrada.

Análogo resultado se tiene para la otra acotación de los núcleos:

Corolario 3.29. *Sea u un peso definido según (3.94). Si se cumplen las desigualdades*

$$a > -\frac{1}{p} - \alpha,$$

$$b < 1 - \frac{1}{p}$$

y

$$b \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3p},$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \geq 0$

$$\|J_n^\alpha(x,0)\|_{L^p(u^p w)} \leq C.$$

Demostración:
Puesto que

$$\|J_n^\alpha(x,0)\|_{L^p(u^p w)} = \|J_n^\alpha(x,0)\|_{L^p((u^{-1})^{-p} w)}$$

y

$$u(x)^{-1} = w(x)^{1/p-1/2} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{-a} (1+|x|)^{-b} = w(x)^{1/2-1/q} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{-a} (1+|x|)^{-b},$$

basta comprobar que se cumplen las hipótesis de la proposición anterior, cambiando p por q, A por $-a$ y B por $-b$ y haciendo $\beta = 0$. Estas son:

$$-a < 1 - \frac{1}{q} + \alpha,$$

$$-b > -\frac{1}{q}$$

y

$$-b \geq -1 + \frac{1}{3q}.$$

Teniendo en cuenta que $1/q = 1 - 1/p$, estas desigualdades son las del enunciado, con lo que el corolario está demostrado.

Ahora es fácil demostrar la convergencia de la serie de Fourier para $d\nu$ con las hipótesis (3.95)-(3.101):

Teorema 3.30. *Sea $S_n f$ la suma parcial enésima de la serie de Fourier con respecto a $d\nu(x) = w(x)\,dx + M\delta_0(x)$ sobre $\mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}|x|^{2\alpha}$. Sean u y v dos pesos definidos por (3.94), con $0 < u(0) < \infty$ y $0 < v(0) < \infty$. Si se cumplen las condiciones (3.95)-(3.101), entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|uS_n f\|_{L^p(d\nu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\nu)} \ \forall f, \ \forall n.$$

Demostración:
Denotemos por s_n la serie de Fourier correspondiente al peso $w(x)\,dx$ (es decir, la de los polinomios de Hermite generalizados de índice α) y por s_n^0 la de $x^2 w(x)\,dx$ (es decir, con índice $\alpha + 1$). Según el teorema 3.8 y la proposición 3.12, basta comprobar lo siguiente:

a) $\|us_nf\|_{L^p(w)} \leq C\|vf\|_{L^p(w)}$ $\forall f$, $\forall n$;

b) $\|x^{1-2/p}us_n^0f\|_{L^p(x^2w)} \leq C\|x^{1-2/p}vf\|_{L^p(x^2w)}$ $\forall f$, $\forall n$;

c) $\|J_n^\alpha(x,0)\|_{L^q(v^{-q}w)} \leq C$ $\forall n$;

d) $\|J_n^\alpha(x,0)\|_{L^p(u^pw)} \leq C$ $\forall n$.

Para un peso de Hermite generalizado, (3.95)-(3.101) sí que implican la convergencia en media; es decir, a) es cierta. Las acotaciones c) y d) son inmediatas, a partir de la proposición 3.28 y el corolario 3.29. En cuanto a b), se trata de la acotación para un peso de Hermite generalizado, con índice $\alpha+1$ y con los pesos:

$$x^{1-2/p}u(x) = (e^{-x^2}|x|^{2(\alpha+1)})^{1/2-1/p}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^a(1+|x|)^b$$

y

$$x^{1-2/p}v(x) = (e^{-x^2}|x|^{2(\alpha+1)})^{1/2-1/p}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^A(1+|x|)^B(1+\log^+|x|)^\beta.$$

Basta comprobar que se verifican las condiciones (3.95)-(3.101), pero con $\alpha+1$ en lugar de α, lo cual es evidente. Esto demuestra el teorema.

CAPÍTULO IV
Convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier

§1. Introducción

Sea $d\mu$ una medida sobre un intervalo (a, b), donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y sea S_n la suma parcial enésima de la serie de Fourier con respecto a un sistema ortonormal y completo en $L^2((a, b), d\mu)$. Dado $p \in [1, \infty)$ y suponiendo que la serie de Fourier está definida en $L^p((a, b), d\mu)$, podemos preguntarnos por la siguiente cuestión:

$$¿S_n f(x) \longrightarrow f(x) \mu - a.e.\ \forall f \in L^p((a, b), d\mu)?$$

La primera observación que se puede hacer es que, en principio, el conocimiento de la convergencia en norma no aporta ningún indicio para resolver nuestro problema.

Asociado a un problema de este tipo aparece de forma natural el operador maximal:

$$S^* f(x) = \sup_n |S_n f(x)|$$

Esto se debe al siguiente resultado, cuya demostración exponemos por su brevedad:

Proposición 4.1. *Sea $1 \leq p < \infty$. Si se verifican las dos propiedades:*

a) existe un subconjunto A denso en $L^p(d\mu)$ tal que $S_n f(x)$ converge $\forall x$ y $\forall f \in A$,

b) S^* es un operador de tipo (p, p)-fuerte (o incluso (p, p)-débil),

entonces $S_n f(x)$ converge μ-a.e. $\forall f \in L^p(d\mu)$.

Demostración:
Sea $f \in L^p(d\mu)$. Utilizamos b) en su forma débil: si $\lambda > 0$ y $g \in A$,

$$\mu(\{x; \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n f(x) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, S_n f(x) > \lambda\}) =$$

$$= \mu(\{x; \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(f-g)(x) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(f-g)(x) > \lambda\}) \leq$$

$$\leq \mu(\{x; S^*(f-g)(x) > \lambda/2\}) \leq C \left(\frac{2}{\lambda}\right)^p \int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, d\mu(x).$$

Por a), podemos tomar g de manera que esta última expresión sea tan pequeña como queramos; por lo tanto,

$$\mu(\{x; \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n f(x) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n f(x) > \lambda\}) = 0\ \forall \lambda > 0,$$

de donde $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n f(x)$ μ-a.e., como queríamos demostrar.

Nota: la relación entre la convergencia en casi todo punto y la acotación del operador maximal es todavía más estrecha, ya que Stein (véase [S 1], teorema 1, pág. 148) demostró que, con determinadas condiciones (véase también [GR], §.VI.2), el recíproco de la proposición anterior es cierto, es decir, la convergencia en casi todo punto de $S_n f$ implica que S^* es de tipo débil.

Indicaremos brevemente lo que ocurre con el sistema trigonométrico, no sólo como un ejemplo, sino porque la convergencia en casi todo punto de dicho sistema se utiliza en el estudio de la convergencia en casi todo punto en otros casos. Dada $f \in L^p(\mathbb{T})$, sea

$$T_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

la suma parcial enésima de la serie de Fourier de f. La acotación del operador maximal correspondiente,

$$T^* f(t) = \sup_n |T_n f(t)|,$$

fue un problema muy difícil, abierto durante muchos años, hasta que fue resuelto por Carleson en 1966 ([C]) para $p = 2$ y extendida por Hunt en 1968 ([Hu 2]) para $1 < p < \infty$:

Teorema 4.2. *Sea $1 < p < \infty$. Existe una constante C tal que*

$$\int_0^{2\pi} |T^* f(t)|^p \, dt \leq C \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \ \forall f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Nota: de este teorema ya sabemos, por la proposición 4.1, que se deduce la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier, pero en principio esta convergencia no tiene por qué ser a la función f. Ahora bien, del teorema se sigue también de forma inmediata la convergencia en norma. Esta, junto con la convergencia en casi todo punto, implica que $T_n f(x) \longrightarrow f(x)$ en casi todo punto:

Corolario 4.3. $\forall f \in \bigcup_{p>1} L^p(\mathbb{T})$, *$T_n f(x) \longrightarrow f(x)$ dx-a.e.*

Para abordar el problema que nos ocupa, en determinados casos particulares se puede intentar obtener una acotación para el operador maximal o hacer uso de conocidos teoremas de equiconvergencia, que comparan la serie de Fourier relativa a un sistema concreto con la serie de Fourier relativa al sistema trigonométrico. Un resultado de equiconvergencia para las series de Fourier respecto de los polinomios de Jacobi es el siguiente:

Teorema 4.4. *Sea f medible en $[-1, 1]$ y tal que*

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta |f(x)| \, dx < +\infty$$

y

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha/2-1/4}(1+x)^{\beta/2-1/4}|f(x)|\,dx<+\infty.$$

Sea $x=\cos\theta$ y $g(\theta)=(1-\cos\theta)^{\alpha/2+1/4}(1+\cos\theta)^{\beta/2+1/4}f(\cos\theta)$ $\forall\theta\in[0,\pi]$, y extendida por paridad a $[-\pi,\pi]$. Sea S_nf la suma enésima de la serie de Fourier-Jacobi de exponentes α, β. Entonces, $\forall x\in(-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_nf(x)-(1-x)^{-\alpha/2-1/4}(1+x)^{-\beta/2-1/4}T_ng(\theta)\right)=0.$$

Este teorema fue obtenido por Haar en 1917 (véase [H]) para polinomios de Legendre ($\alpha=\beta=0$) y en general por Szegő en 1933 ([Sz 1]) (véase también [Sz 2], teorema 9.1.2., pág. 246). La posibilidad de obtener un teorema de esta clase se debe a que los polinomios de Jacobi admiten expresiones asintóticas donde aparecen senos y cosenos (véase [Sz 2], capítulo VIII):
(4.1)

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)=n^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2})^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{-\beta-\frac{1}{2}}\{\cos(N\theta+\gamma)+(n\operatorname{sen}\theta)^{-1}\mathcal{O}(1)\},$$

para $cn^{-1}\le\theta\le\pi-cn^{-1}$, donde c es un número positivo prefijado, $N=n+(\alpha+\beta+1)/2$ y $\gamma=-(\alpha+1/2)\pi/2$.

Combinando el teorema 4.2 de Carleson-Hunt y el 4.4 de equiconvergencia, es claro que se puede obtener la convergencia en casi todo punto para la serie de Fourier-Jacobi. Esto fue probado por Pollard en 1972 (véase [P 3]); lo enunciamos y damos la demostración para la serie de Fourier-Legendre:

Teorema 4.5. *Sea $p\in(4/3,\infty)$. Si $f\in L^p(dx)$, la serie de Fourier-Legendre $S_nf(x)$ converge en casi todo punto.*

Demostración:
Como $f\in L^p(dx)$ y $p>4/3$, la desigualdad de Hölder prueba que

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/4}|f(x)|\,dx<+\infty,$$

con lo que se cumplen las hipótesis del teorema 4.4 de equiconvergencia. Así, sólo hace falta probar que la función $g(\theta)=(1-\cos\theta)^{1/4}(1+\cos\theta)^{1/4}f(\cos\theta)$ está en $L^r(\mathbb{T})$ para algún $r>1$ y hacer uso del teorema 4.2 de Carleson-Hunt, lo cual es un simple ejercicio.

También mediante teoremas de equiconvergencia con la serie de Fourier trigonométrica, Titchmarsh ([T], teorema 4.9, pág. 84) y Benedek y Panzone (véase [BP 3]) demostraron la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier con respecto al sistema de Bessel.

Notemos que un teorema de equiconvergencia no sirve para obtener acotaciones para el operador maximal. Un teorema de acotación para el operador maximal es siempre mejor, ya que no sólo implica la convergencia en casi todo punto, sino también la convergencia en norma de la serie de Fourier. Esta vía solamente ha sido utilizada por Badkov (véase [B]), en el caso de los polinomios de Jacobi generalizados.

Otra forma de obtener convergencia en norma y en casi todo punto para sistemas ortonormales concretos es mediante el uso de teoremas de trasplantación. Explicaremos brevemente en qué consiste un teorema de trasplantación: sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sistemas ortonormales sobre el intervalo $(0,\pi)$ (aunque en algunos de los resultados que vamos a exponer no hace falta la ortogonalidad) y $\xi = \{\xi_n\}$ una sucesión. Se trata de estudiar el operador $\mathcal{T}_\xi$ que a cada función f sobre $(0,\pi)$ le asocia la función

$$\mathcal{T}_\xi f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \left(\int_0^\pi f(t) v_n(t)\, dt \right) u_n(x).$$

En concreto, un teorema de trasplantación es el que proporciona una desigualdad como la siguiente:

$$\int_0^\pi |\mathcal{T}_\xi f(x)|^p w(x)\, dx \le C \int_0^\pi |f(x)|^p w(x)\, dx, \tag{4.2}$$

incluso con pesos o exponentes distintos en cada lado.

Esta desigualdad fue estudiada por Askey (véase [A]) en el caso particular:

$$u_n(\theta) = 2^{(\alpha+\beta+1)/2} A_n^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})^{\alpha+1/2}(\cos\frac{\theta}{2})^{\beta+1/2};$$

$$v_n(\theta) = 2^{(\gamma+\delta+1)/2} A_n^{\gamma,\delta} P_n^{\gamma,\delta}(\cos\theta)(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})^{\gamma+1/2}(\cos\frac{\theta}{2})^{\delta+1/2}$$

(donde $\alpha,\beta,\gamma,\delta \ge -1/2$, $P_n^{\alpha,\beta}$ y $P_n^{\gamma,\delta}$ son polinomios de Jacobi de exponentes α, β, γ y δ y $A_n^{\alpha,\beta}$ y $A_n^{\gamma,\delta}$ son sus respectivas constantes de ortonormalización);

$$1 < p < \infty; \qquad \xi = \mathbf{r} = \{r^n\}, \text{ con } 0 < r < 1;$$

$$w(\theta) = (\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})^\sigma (\cos\frac{\theta}{2})^\tau, \text{ con } -1 < \sigma,\tau < p-1.$$

En el citado trabajo, Askey obtuvo la desigualdad (4.2) para $\mathcal{T}_{\mathbf{r}}$, con una constante C independiente de r. Además, demostró que existe una función $\mathcal{T} f(x) = \lim_{r\to 1} \mathcal{T}_{\mathbf{r}} f(x)$ en casi todo punto, con lo que se encuentra un operador $\mathcal{T}$ que vuelve a satisfacer (4.2).

Cuando $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ y $\alpha = \gamma + 1$, la función $\mathcal{T} f$ que aparece es esencialmente la función conjugada, en el contexto de polinomios ultraesféricos, introducida por Muckenhoupt y Stein (véase [MS]) por medio de ecuaciones diferenciales, donde dichos polinomios son autofunciones de un sistema particular de Sturm-Liouville (véase [MS] y [S 2]).

Como consecuencia de este teorema, Askey obtiene teoremas de multiplicadores de tipo Marcinkiewicz para polinomios de Jacobi. En particular, consigue una nueva demostración del resultado de Pollard sobre la convergencia en norma para series de Jacobi, cuando $\alpha, \beta \geq -1/2$.

Nota: al imponer las condiciones $-1 < \sigma, \tau < p - 1$, Askey está considerando, sin saberlo todavía (pues su trabajo es anterior a la aparición de estos pesos) que $w \in A_p$; es una observación bastante inmediata que su resultado es cierto con pesos generales $w \in A_p$.

Un avance en los resultados de Askey lo constituye la monografía [Mu 5] de Muckenhoupt, donde se analiza el caso de polinomios de Jacobi, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq -1$, sucesiones $\xi = \{\xi_n\}$ del tipo $\{r^n(n+1)^{-s}\}$, con $s \geq 0$, y pesos w más generales, sujetos a ciertas condiciones de integrabilidad (véase [Mu 5], teorema 1.14, pág. 6). La obtención de resultados de esta clase se debe otra vez a la fórmula (4.1). Podría decirse que la acotación (4.2) se deduce si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son esencialmente funciones que se expresan mediante senos y cosenos, de forma que sea posible comparar el operador $\mathcal{T}_\xi$ con el multiplicador habitual en análisis armónico

$$f \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n \widehat{f}(n) e^{inx},$$

del que se conocen buenas acotaciones (en el caso $\xi = \mathbf{r}$, el operador es la integral de Poisson). Esta idea es desarrollada en el trabajo de Gilbert ([G]) que exponemos más adelante.

Ya hemos apuntado que del teorema de trasplantación de Askey se puede deducir la convergencia en norma de la serie de Fourier para polinomios de Jacobi. Ahora bien, no es posible, ni de ese teorema, ni del resultado citado de Muckenhoupt, obtener consecuencias sobre la convergencia en casi todo punto. La razón es que no se considera ningún operador de tipo maximal.

Gilbert observó que es posible estudiar algo más general. En concreto, considerar una sucesión $\xi_k = \{\xi_{k,n}\}$, con $k \in \mathbb{N}$, definir

$$\mathcal{T}_{\xi_k} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{k,n} \left(\int_0^\pi f(t) v_n(t)\, dt \right) u_n(x)$$

y

$$\mathcal{T}^* f(x) = \sup_k |\mathcal{T}_{\xi_k} f(x)|$$

y estudiar acotaciones del tipo:

$$\int_0^\pi |\mathcal{T}^* f(x)|^p w(x)\, dx \le C \int_0^\pi |f(x)|^p w(x)\, dx. \tag{4.3}$$

Gilbert trata sólo (véase [G]) el caso sin peso ($w \equiv 1$). Para enunciar su resultado necesitamos alguna notación:

Sea $\{u_n\}_{n\ge 0}$ una sucesión de funciones en $[0,\pi]$ que verifican las siguientes condiciones:

(4.4) Existe una constante A tal que $\sup_{0<x<\pi} |u_n(x)| \le A\ \forall n$.

(4.5) Existen funciones X_1, X_2, X_3 y X_4 en $L^\infty((0,\pi/2))$ tales que

$$u_n(x) = X_1(x)\cos nx + X_2(x)\operatorname{sen} nx +$$

$$+\frac{1}{nx}\{X_3(x)\cos nx + X_4(x)\operatorname{sen} nx\} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2x^2}),$$

uniformemente para $x \in (1/n, \pi/2)$.

(4.6) Existen funciones X_1', X_2', X_3' y X_4' en $L^\infty((0,\pi/2))$ tales que

$$\Delta(u_n)(x) = x\{X_1'(x)\cos nx + X_2'(x)\operatorname{sen} nx\} +$$

$$+\frac{1}{n}\{X_3'(x)\cos nx + X_4'(x)\operatorname{sen} nx\} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2x}),$$

uniformemente para $x \in (1/n, \pi/2)$, donde $\Delta(u_n) = u_{n+1} - u_n$.

(4.7) Existe una función X en $L^\infty((0,\pi/2))$ tal que

$$\Delta(u_n)(x) = n^{-1}X(x)u_n(x) + (n^{-2} + x)\mathcal{O}(1)$$

uniformemente para $x \in (0, 1/n)$.

(4.8) Existe una sucesión $\{U_n\}$ que cumple (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7) y tal que $u_n(\pi - x) = (-1)^n U_n(x) + \mathcal{O}(n^{-2})$ uniformemente para $x \in (0,\pi/2)$.

Sea $\{r_{n,k}\}$ una sucesión doble tal que:

(4.9) $\sum_{n=0}^\infty |r_{n,k}| < \infty$, $\forall k$.

(4.10) Existe una constante B tal que $|r_{n,k}| \le B\ \forall n, k$.

(4.11) Existe una constante B tal que $\sum_{n=0}^\infty |\Delta(r_{n,k})| < B$, $\forall k$, donde $\Delta(r_{n,k}) = r_{n+1,k} - r_{n,k}$.

Si $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ y $\{r_{n,k}\}$ cumplen (4.4),..., (4.11), definimos los núcleos:

$$K_k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} e^{inx} e^{-int}, \qquad \mathcal{K}_k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} u_n(x) v_n(t).$$

En esta situación, el resultado de Gilbert es el siguiente:

Teorema 4.6. *Sea $1 < p < \infty$. Si el operador*

$$f \longrightarrow \sup_k \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_k(x,t)\, dt \right|$$

es de tipo (p,p)-débil o (p,p)-fuerte en $L^p((-\pi,\pi))$, entonces el operador

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_0^{\pi} \phi(t) \mathcal{K}_k(x,t)\, dt \right|$$

es de tipo (p,p)-débil o (p,p)-fuerte, respectivamente, en $L^p((0,\pi))$.

Un ejemplo de un sistema que satisface (4.4),..., (4.8) es el de los polinomios de Jacobi con $\alpha, \beta \geq -1/2$, considerados en $(0,\pi)$ mediante el cambio $x = \cos\theta$; es decir:

$$u_n^{\alpha,\beta}(\theta) = A_n^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)(1-\cos\theta)^{\alpha/2+1/4}(1-\cos\theta)^{\beta/2+1/4},$$

donde $A_n^{\alpha,\beta}$ es una constante de normalización. El teorema de Gilbert proporciona otro método para obtener el teorema 4.5 de Pollard sobre la convergencia en casi todo punto. En efecto: sea, por ejemplo $\alpha = \beta = 0$; si g es una función en $[-1,1]$ y $f(\theta) = g(\cos\theta)$ en $[0,\pi]$ y llamamos $S_n g$ a la serie de Fourier respecto de $P_n^{\alpha,\beta}$ en $[-1,1]$ y $S'_n f$ a la serie de Fourier respecto de $u_n^{\alpha,\beta}$ en $[0,\pi]$, tenemos:

$$(1-x)^{1/4}(1+x)^{1/4} S_n(g(t)(1-t)^{-1/4}(1+t)^{-1/4}, x) = S'_n f(\theta), \tag{4.12}$$

donde $x = \cos\theta$. Si en el teorema de Gilbert tomamos la función maximal correspondiente a

$$r_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k, \\ 0 & \text{si } n > k, \end{cases}$$

el operador correspondiente a $\mathcal{K}_k(x,t)$ es:

$$\phi \longrightarrow (S')^*(\phi)(x) = \sup_k |S'_k \phi(x)|.$$

Y el correspondiente a $K_k(x,t)$ es:

$$f \longrightarrow T^*(f^\flat)(x) = \sup_k |\sum_{n=0}^{k} \widehat{f}(n) e^{inx}|,$$

donde $f^\flat$ es la función tal que $\widehat{f^\flat}(n) = \widehat{f}(n)$ si $n \geq 0$ y $\widehat{f^\flat}(n) = 0$ si $n < 0$. Es claro que $f^\flat = \frac{1}{2}\widehat{f^\flat}(0) + \frac{1}{2}(f + i\widetilde{f})$, donde $\widetilde{f}$ es la función conjugada. De los teoremas de Riesz y de Carleson-Hunt (teorema 4.2) se deduce que este último operador está acotado en $L^p((-\pi,\pi))$, para $p > 1$. Por lo tanto, $S'_n f$ converge en casi todo punto, $\forall f \in \bigcup_{p>1} L^p((0,\pi))$. Sólo hay que comprobar ahora que si $g \in \bigcup_{p>4/3} L^p((-1,1))$, entonces $f \in L^p((0,\pi))$ para algún $p > 1$, lo que es un ejercicio sencillo.

Sin embargo, seguimos sin poder probar una acotación de tipo (p,p) para el operador maximal S^*. La razón es que las acotaciones de S^* y $(S')^*$ no son equivalentes. De (4.12) obtenemos, para las series de Fourier-Legendre:

$$S_n(g)(x) = (\operatorname{sen}\theta)^{-1/2} S'_n(f(\theta)\operatorname{sen}\theta)(\theta),$$

de donde

$$S^*(g)(x) = (\operatorname{sen}\theta)^{-1/2}(S')^*(f(\theta)\operatorname{sen}\theta)(\theta).$$

Así, parece claro que para obtener una acotación para el operador maximal S^* se necesita una acotación con pesos para $(S')^*$.

El objeto del apartado siguiente es analizar el teorema de Gilbert con pesos A_p, dado que, por el teorema de Hunt y Young ([HY]), tenemos acotación con estos pesos para la maximal en el caso trigonométrico. La extensión a pesos A_p puede resultar en la actualidad un ejercicio más o menos inmediato; pero creemos que es interesante su inclusión en esta memoria, porque se pueden obtener como consecuencia acotaciones con pesos para la maximal de las sumas parciales de la serie de Fourier-Jacobi, que extienden en cierta forma resultados de Badkov. También se obtienen acotaciones para la maximal de la serie de Bessel que no han sido tratadas en la literatura matemática.

En el apartado tercero, analizamos el problema de las condiciones necesarias para la convergencia en casi todo punto; obtenemos un criterio que nos permite delimitar el intervalo de convergencia en casi todo punto, en casos bastante generales.

§2. Acotación del operador maximal S^*

El principal objetivo de este apartado es generalizar el teorema 4.6 de Gilbert, introduciendo pesos w sobre el intervalo $(-\pi,\pi)$ que estén en la clase A_p. Todos los pesos que vamos a considerar serán pesos pares en $(-\pi,\pi)$, con lo cual $w \in A_p((-\pi,\pi)) \Leftrightarrow w \in A_p((0,\pi))$. La necesidad de que el peso w sea par, que surge a lo largo de la demostración del teorema, parece bastante natural si lo que queremos es deducir la acotación de un operador en $L^p((0,\pi),w)$ de la acotación de otro operador en $L^p((-\pi,\pi),w)$. En concreto, el resultado es el siguiente, con la notación del apartado anterior:

Teorema 4.7. *Sea* $1 < p < \infty$. *Sea* $w \in A_p((-\pi,\pi))$ *un peso par. Sean* $\{u_n\}$ *y* $\{v_n\}$ *dos sucesiones de funciones que cumplen (4.4),…, (4.8) y* $\{r_n\}$ *una sucesión que cumple (4.9), (4.10) y (4.11).*
Si el operador

$$f \longrightarrow \mathcal{S}^* f(x) = \sup_k \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_k(x,t)\, dt \right|$$

es de tipo (p,p)*-fuerte en* $L^p((-\pi,\pi),w)$*, entonces el operador*

$$\phi \longrightarrow \mathcal{T}^* \phi(x) = \sup_k \left| \int_0^{\pi} \phi(t) \mathcal{K}_k(x,t)\, dt \right|$$

es de tipo (p,p)*-fuerte en* $L^p((0,\pi),w)$.

La demostración consiste en seguir la de Gilbert sin pesos y comprobar que sirve también en el caso de pesos pares de la clase A_p. Dicha demostración se basa en controlar el operador maximal $\mathcal{T}^*$ por operadores muy relacionados con $\mathcal{S}^*$ (puesto que u_n y v_n se expresan en términos de senos y cosenos), junto con otros que pueden ser acotados por los siguientes operadores:

$$G_1(\phi)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \phi(t)\, dt;$$

$$G_2(\phi)(x) = \int_x^{\pi} \phi(t) \frac{1}{t}\, dt;$$

$$G_3(\phi)(x) = \sup_h \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\phi(t)|\, dt;$$

$$G_4(\phi)(x) = \int_0^{\pi} \phi(t) \frac{\operatorname{sen} x}{\cos t - \cos x}\, dt;$$

$$G_5(\phi)(x) = \int_0^{\pi} \phi(t) \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t - \cos x}\, dt.$$

En adelante, w será, como hemos dicho previamente, un peso par y en la clase $A_p((-\pi,\pi))$, donde $1 < p < \infty$. Veamos la acotación de estos operadores con el peso w. En primer lugar, G_1 y G_3 son de tipo (p,p)-fuerte en $L^p((0,\pi),w)$, puesto que están acotados por la maximal de Hardy-Littlewood y esta lo es. Consideremos ahora el operador G_2:

$$G_2(\phi)(x) = \int_x^\pi \phi(t)\frac{1}{t}\,dt = \int_0^\pi \phi(t)K(x,t)\,dt,$$

con $K(x,t) = \frac{1}{t}\chi_{\{x<t\}}$; pues bien, $G_1(\phi)(x) = \int_0^\pi \phi(t)K(t,x)\,dt$, de modo que G_1 y G_2 son adjuntos uno del otro con respecto a dt:

$$\int_0^\pi \phi_1 G_2(\phi_2)\,dt = \int_0^\pi \phi_2 G_1(\phi_1)\,dt.$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\|G_2(\phi_2)\|_{L^p(w)} \le C\|\phi_2\|_{L^p(w)}\ \forall\phi_2 \in L^p(w) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|G_1(\phi_1)\|_{L^q(w^{-q/p})} \le C\|\phi_1\|_{L^q(w^{-q/p})}\ \forall\phi_1 \in L^q(w^{-q/p}),$$

donde $1/p + 1/q = 1$ (esta equivalencia es cierta en general, para cualquier peso, para dos operadores adjuntos).

Pero como $w \in A_p((0,\pi)) \Leftrightarrow w^{-q/p} \in A_q((0,\pi))$, G_1 resulta ser de tipo (q,q)-fuerte en $L^q(w^{-q/p})$ y, por lo tanto, G_2 es de tipo (p,p)-fuerte en $L^p(w)$, como queríamos ver.

Tomemos ahora el operador G_4. El operador que a cada función le asigna su función conjugada, es decir,

$$f \longrightarrow \widetilde{f}(x) = \int_{-\pi}^\pi f(t)\operatorname{cotg}\frac{x-t}{2}\,dt = \int_{-\pi}^\pi f(t)\frac{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} x}{\cos t - \cos x}\,dt,$$

es de tipo (p,p)-fuerte en $L^p((-\pi,\pi),w)$, por ser $w \in A_p((-\pi,\pi))$. Sea entonces $\phi \in L^p((0,\pi),w)$ y f su extensión par a $(-\pi,\pi)$; como

$$\int_{-\pi}^\pi f(t)\frac{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} x}{\cos t - \cos x}\,dt = \int_{-\pi}^\pi f(t)\frac{\operatorname{sen} x}{\cos t - \cos x}\,dt = 2G_4(\phi)(x)$$

y f y w son pares, resulta:

$$\|G_4(\phi)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le 2\|\widetilde{f}\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|f\|_{L^p((-\pi,\pi),w)} = C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}.$$

De análoga manera se prueba que G_5 es de tipo (p,p)-fuerte en $L^p((0,\pi),w)$.

Por consiguiente, los operadores G_i están acotados por estarlo la función maximal y la función conjugada; son operadores que aparecerán por el camino, al relacionar $\mathcal{T}^*$ con $\mathcal{S}^*$ o, más exactamente, con otros operadores que están acotados si lo está $\mathcal{S}^*$ y de los que nos ocupamos en los siguientes lemas. En ellos, mediante $\left\{\begin{smallmatrix}\cos nx\\ \operatorname{sen} nx\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\cos nt\\ \operatorname{sen} nt\end{smallmatrix}\right\}$ denotamos una de las combinaciones: $\cos nx\cos nt$, $\cos nx\operatorname{sen} nt$, $\operatorname{sen} nx\cos nt$, $\operatorname{sen} nx\operatorname{sen} nt$.

Lema 4.8. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $\mathcal{S}^*$ *es de tipo* (p,p)*-fuerte en* $L^p((-\pi,\pi),w)$*, entonces los cuatro operadores*

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_0^\pi \phi(t) \left[\sum_{n=0}^\infty r_{n,k} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos nt \\ \operatorname{sen} nt \end{Bmatrix} \right] dt \right|$$

son de tipo (p,p)*-fuerte en* $L^p((0,\pi),w)$*.*

Demostración:
Hagamos

$$W_1^*(\phi)(x) = \sup_k \left| \int_0^\pi \phi(t) \left[\sum_{n=0}^\infty r_{n,k} \cos nx \cos nt \right] dt \right|$$

y de manera análoga los otros tres: $W_2^*(\phi)$, $W_3^*(\phi)$ y $W_4^*(\phi)$.
Dada $\phi \in L^p((0,\pi),w)$, sea f su extensión par a $(-\pi,\pi)$. Teniendo en cuenta que f es par y que $\sum_{n=0}^\infty r_{n,k} \cos nx\, e^{-int} = \frac{1}{2}K_k(x,t) + \frac{1}{2}K_k(-x,t)$, es fácil ver que

$$W_1^*(\phi)(x) \leq \frac{1}{4}\mathcal{S}^* f(x) + \frac{1}{4}\mathcal{S}^* f(-x).$$

De la misma manera se comprueba que $W_2^*(\phi)$, $W_3^*(\phi)$ y $W_4^*(\phi)$ cumplen esta misma desigualdad, aunque f es unas veces la extensión par y otras la impar de ϕ a $(-\pi,\pi)$. Por lo tanto, haciendo un cambio de variable $x = -y$ en el segundo sumando,

$$\|W_i^*(\phi)\|_{L^p((0,\pi),w)} \leq C\|\mathcal{S}^*(f)\|_{L^p((0,\pi),w)} + C\|\mathcal{S}^*(f)\|_{L^p((-\pi,0),w(-y))} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{L^p((-\pi,\pi),w)} = C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)},$$

como queríamos demostrar.

Lema 4.9. *Si* $1 < p < \infty$*,* $w \in A_p((-\pi,\pi))$ *y es par y* $\mathcal{S}^*$ *es de tipo* (p,p)*-fuerte en* $L^p((-\pi,\pi),w)$*, entonces los cuatro operadores*

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_{x/2}^{2x} \phi(t) \left[\sum_{n=0}^\infty r_{n,k} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos nt \\ \operatorname{sen} nt \end{Bmatrix} \right] dt \right|$$

son de tipo (p,p)*-fuerte de* $L^p((0,\pi/2),w)$ *en* $L^p((0,\pi),w)$*. (En la integral, se entiende que* $\phi \equiv 0$ *fuera de* $(0,\pi/2)$*.)*

Demostración:
Por el lema 4.8, sólo hace falta ver que son de tipo (p,p)-fuerte de $L^p((0,\pi/2),w)$ en $L^p((0,\pi),w)$ los siguientes operadores:

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_0^{x/2} \phi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos nt \\ \operatorname{sen} nt \end{Bmatrix} \right] dt \right|$$

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_{2x}^{\pi/2} \phi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos nt \\ \operatorname{sen} nt \end{Bmatrix} \right] dt \right|$$

Pero, según demuestra Gilbert, están controlados por los siguientes:

$$G_1(|\phi|); \qquad G_2(|\phi|); \qquad G_3(\phi); \qquad \phi \longrightarrow \frac{1}{x}\int_0^{x/2} \phi(t)\, dt$$

y por el operador constante: $\phi \longrightarrow \int_0^{\pi/2} |\phi(t)| dt$.
Los cuatro primeros son de tipo (p,p)-fuerte, según hemos visto (el cuarto también está acotado por la maximal de Hardy-Littlewood); en cuanto al operador constante, aplicando la desigualdad de Hölder y que $w \in A_p((0,\pi))$ resulta:

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} |\phi| \right)^p w \le \int_0^{\pi/2} |\phi|^p w \left(\int_0^{\pi} w^{-q/p} \right)^{p/q} \int_0^{\pi} w \le C \int_0^{\pi/2} |\phi|^p w,$$

luego también es de tipo (p,p)-fuerte. Esto demuestra el lema.

Lema 4.10. *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p((0,\pi))$ par. Para cada $\phi \in L^p((\pi/2,\pi))$ y cada $x \in (0,\pi/2)$, sea*

$$U^*(\phi)(x) = \sup_k \left| \int_{x/2}^{2x} \phi(\pi-\eta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos n(\pi-\eta) \\ \operatorname{sen} n(\pi-\eta) \end{Bmatrix} \right] d\eta \right|$$

(se considera $\phi \equiv 0$ fuera de $(\pi/2,\pi)$). Entonces, U^* es de tipo (p,p)-fuerte de $L^p((\pi/2,\pi),w)$ en $L^p((0,\pi/2),w)$.

Demostración:
Definiendo

$$U_1^*(\phi)(x) = \sup_k \left| \int_0^{\pi/2} \phi(\pi-\eta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \cos nx \cos n(\pi-\eta) \right] d\eta \right|,$$

Gilbert demuestra que está controlado por los operadores:

$$\phi \longrightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} |\phi|$$

y

$$\phi \longrightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} |\phi(t)| \frac{1}{\cos t - \cos x} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} x \end{Bmatrix} dt.$$

El primer operador es constante y se demuestra su acotación como en el lema anterior, por ser $w \in A_p((0,\pi))$. El segundo es igualmente de tipo (p,p)-fuerte, por serlo G_4 y G_5.
Una vez probado que $U_1^*(\phi)$ es de tipo (p,p)-fuerte, sólo hace falta ver que también lo son:

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_0^{x/2} \phi(\pi - \eta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \cos nx \cos n(\pi - \eta) \right] d\eta \right|$$

y

$$\phi \longrightarrow \sup_k \left| \int_{2x}^{\pi/2} \phi(\pi - \eta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \cos nx \cos n(\pi - \eta) \right] d\eta \right|.$$

Pero estos resultan estar acotados de nuevo por el operador constante

$$\phi \longrightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} |\phi|,$$

por lo que, en efecto, son de tipo (p,p)-fuerte. Con las combinaciones

$$\cos nx \operatorname{sen} n(\pi - \eta), \dots,$$

se procede de igual manera.

El siguiente lema admite una demostración similar al que acabamos de probar:

Lema 4.11. *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p((0,\pi))$ par. Para cada $\phi \in L^p((0,\pi/2))$ y cada $x \in (\pi/2, \pi)$, sea $\xi = \pi - x$; sea*

$$V^*(\phi)(x) = \sup_k \left| \int_{\xi/2}^{2\xi} \phi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos nt \\ \operatorname{sen} nt \end{Bmatrix} \right] dt \right|$$

(se considera $\phi \equiv 0$ fuera de $(0,\pi/2)$). Entonces, V^* es de tipo (p,p)-fuerte de $L^p((0,\pi/2),w)$ en $L^p((\pi/2,\pi),w)$.

Indicamos a continuación el esquema de la demostración del teorema 4.7:
Dada $\phi \in L^p((0,\pi),w)$, podemos acotar $\mathcal{T}^*\phi$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}^*\phi(x) \leq \chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\phi)(x) + \chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(\pi/2,\pi)}\phi)(x) +$$

$$+ \chi_{(\pi/2,\pi)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\phi)(x) + \chi_{(\pi/2,\pi)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(\pi/2,\pi)}\phi)(x).$$

Basta entonces probar las cuatro acotaciones:

$$\|\chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}; \tag{4.13}$$

$$\|\chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(\pi/2,\pi)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}; \tag{4.14}$$

$$\|\chi_{(\pi/2,\pi)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}; \tag{4.15}$$

$$\|\chi_{(\pi/2,\pi)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(\pi/2,\pi)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}. \tag{4.16}$$

A su vez, para probar (4.13) es suficiente con obtener:

$$\|\chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\chi_{(x/2,2x)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}; \tag{4.17}$$

$$\|\chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\chi_{(0,x/2)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}; \tag{4.18}$$

$$\|\chi_{(0,\pi/2)}(x)\mathcal{T}^*(\chi_{(0,\pi/2)}\chi_{(2x,\pi/2)}\phi)(x)\|_{L^p((0,\pi),w)} \le C\|\phi\|_{L^p((0,\pi),w)}. \tag{4.19}$$

Pero los operadores que aparecen en estas tres desigualdades se controlan por los operadores G_1, G_2 y G_3, por composiciones de estos y por el operador del lema 4.9. De ello se deduce entonces (4.17), (4.18) y (4.19) y, por lo tanto, (4.13).

En cuanto a (4.14), (4.15) y (4.16), haciendo los oportunos cambios de variable podemos transformar $\chi_{(\pi/2,\pi)}$ en $\chi_{(0,\pi/2)}$. Usando (4.8) y los lemas 4.10 y 4.11, se demuestran estas acotaciones y el teorema está probado.

Observación 4.12. De igual manera se prueba que si $\mathcal{S}^*$ es de tipo (p,p)-débil en $L^p((-\pi,\pi),w)$, entonces $\mathcal{T}^*$ es de tipo (p,p)-débil en $L^p((0,\pi),w)$.

Para obtener consecuencias prácticas del teorema 4.7 no hay más que tomar sucesiones $\{r_{n,k}\}$ y pesos w concretos, para los cuales resulte un operador $\mathcal{S}^*$ del que conozcamos su acotación: obtenemos así la acotación del operador $\mathcal{T}^*$ asociado. Por ejemplo, tomemos un sistema ortonormal $\{u_n\}$ que verifique (4.4),…, (4.8) y $v_n = u_n$ $\forall n$. Sean S_n las sumas parciales de la serie de Fourier con respecto a $\{u_n\}$ y sea S^* su maximal. Tomemos

$$r_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \le k, \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que $\{r_{n,k}\}$ cumple (4.9), (4.10) y (4.11). Como ya vimos, el operador correspondiente a $K_k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} e^{inx} e^{-int}$ es

$$f \longrightarrow T^*(f^\flat)(x) = \sup_k \Big|\sum_{n=0}^{k} \widehat{f}(n) e^{inx}\Big|$$

y el correspondiente a $\mathcal{K}_k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n,k} u_n(x) u_n(t)$ es:

$$\phi \longrightarrow S^*(\phi)(x) = \sup_k |S_k \phi(x)|.$$

Pero tanto el operador maximal de la serie de Fourier trigonométrica, T^*, como el operador $f \longrightarrow f^\flat$ son de tipo (p,p)-fuerte en $L^p((-\pi,\pi),w)$ cuando $w \in A_p((-\pi,\pi))$, por los teoremas de Hunt-Young (véase [HY]) y Hunt-Muckenhoupt-Wheeden ([HMW]), respectivamente. Esto prueba el resultado siguiente:

Corolario 4.13. *Sea $\{u_n\}$ un sistema ortonormal sobre $(0,\pi)$ que satisface (4.4), ..., (4.8) y S^* el operador maximal de las sumas parciales de su serie de Fourier. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p((0,\pi))$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|S^* f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)} \ \forall f \in L^p((0,\pi),w).$$

Una primera aplicación de este resultado es la acotación del operador maximal de la serie de Fourier relativa a los polinomios de Jacobi, cuando $\alpha, \beta \geq -1/2$:

Proposición 4.14. *Sean $\alpha, \beta \geq -1/2$, $1 < p < \infty$. Sea S^* el operador maximal de la serie de Fourier-Jacobi relativa a $d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\, dx$ sobre el intervalo $(-1,1)$ y sea u un peso en $(-1,1)$. Si*

$$u(\cos t)(1-\cos t)^{(2-p)(2\alpha+1)/4}(1+\cos t)^{(2-p)(2\beta+1)/4} \in A_p((0,\pi)), \tag{4.20}$$

entonces

$$S^* : L^p(u\, d\mu) \longrightarrow L^p(u\, d\mu)$$

está acotado.

Demostración:
Denotemos por $P_n^{\alpha,\beta}$ los polinomios de Jacobi correspondientes a $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx$, que consideramos ya normalizados para evitar tener que manejar las constantes de normalización. Mediante el cambio $x = \cos\theta$ obtenemos un sistema ortonormal en $(0,\pi)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx =$$

$$= \int_0^\pi P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) P_m^{\alpha,\beta}(\cos\theta)(1-\cos\theta)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta)^{\beta+1/2}\, d\theta = \int_0^\pi u_n(\theta) u_m(\theta)\, d\theta,$$

con $u_n(\theta) = P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)(1-\cos\theta)^{\alpha/2+1/4}(1+\cos\theta)^{\beta/2+1/4}$. Si $\alpha, \beta \geq -1/2$, este sistema $\{u_n\}$ satisface (4.4),..., (4.8) (véase [G]). Además, si por S_n denotamos las sumas parciales de la serie de Fourier para $\{P_n^{\alpha,\beta}\}$, por S'_n las de $\{u_n\}$ y por

$(S')^*$ el operador maximal de las S'_n, obtenemos para cada función f sobre $(-1,1)$ que tenga desarrollo de Fourier:

$$S_n(f,\cos t) = \int_{-1}^{1} f(y) \sum_{m=0}^{n} P_m^{\alpha,\beta}(y) P_m^{\alpha,\beta}(\cos t)(1-y)^\alpha(1+y)^\beta\, dy =$$

$$= \int_0^\pi f(\cos\theta) \sum_{m=0}^{n} P_m^{\alpha,\beta}(\cos\theta) P_m^{\alpha,\beta}(\cos t)(1-\cos\theta)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta)^{\beta+1/2}\, d\theta =$$

$$= (1-\cos t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+\cos t)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \int_0^\pi [f(\cos\theta)(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+\cos\theta)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}] \sum_{m=0}^{n} u_m(\theta)u_m(t)\, d\theta =$$

$$= (1-\cos t)^{-\alpha/2-1/4}(1+\cos t)^{-\beta/2-1/4} S'_n(g,t),$$

donde $g(t) = f(\cos t)(1-\cos t)^{\alpha/2+1/4}(1+\cos t)^{\beta/2+1/4}$. Por lo tanto:

$$S^*(f,\cos t) = (1-\cos t)^{-\alpha/2-1/4}(1+\cos t)^{-\beta/2-1/4}(S')^*(g,t).$$

Entonces:

$$\|S^*(f,x)\|_{L^p(u(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx)} \le C\|f\|_{L^p(u(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|S^*(f,\cos t)\|_{L^p(u(\cos t)(1-\cos t)^{\alpha+1/2}(1+\cos t)^{\beta+1/2}\, dt)} \le$$

$$\le C\|f(\cos t)\|_{L^p(u(\cos t)(1-\cos t)^{\alpha+1/2}(1+\cos t)^{\beta+1/2}\, dt)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|(S')^*(g,t)\|_{L^p(u(\cos t)(1-\cos t)^{(2-p)(2\alpha+1)/4}(1+\cos t)^{(2-p)(2\beta+1)/4}\, dt)} \le$$

$$\le C\|g(t)\|_{L^p(u(\cos t)(1-\cos t)^{(2-p)(2\alpha+1)/4}(1+\cos t)^{(2-p)(2\beta+1)/4}\, dt)}.$$

Y, según el corolario 4.13, esto es cierto para toda g si

$$u(\cos t)(1-\cos t)^{(2-p)(2\alpha+1)/4}(1+\cos t)^{(2-p)(2\beta+1)/4} \in A_p((0,\pi)),$$

como queríamos demostrar.

La expresión (4.20) es una condición A_p sobre el peso u, después de haber hecho el cambio $x = \cos\theta$ para pasar al intervalo $(0,\pi)$. No es fácil deshacer el cambio en la condición A_p, para volver al intervalo $(-1,1)$ original, como sería de desear. Sin embargo, podemos examinar directamente (4.20) en casos particulares; por ejemplo, para obtener los resultados de Badkov (véase [B]) en el caso de los polinomios de Jacobi con $\alpha, \beta \ge -1/2$:

Corolario 4.15. *Sean $\alpha, \beta \geq -1/2$, $1 < p < \infty$. Sea S^* el operador maximal de la serie de Fourier-Jacobi relativa a $d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx$ sobre el intervalo $(-1,1)$ y sea $u(x) = (1-x)^{ap}(1-x)^{bp}$.*
Si se cumplen las condiciones

$$a + (\alpha+1)(1/p - 1/2) < 1/4, \qquad b + (\beta+1)(1/p-1/2) < 1/4,$$

$$a + (\alpha+1)(1/p-1/2) > -1/4 \qquad y \qquad b + (\beta+1)(1/p-1/2) > -1/4,$$

entonces $S^* : L^p(u\, d\mu) \longrightarrow L^p(u\, d\mu)$ es un operador acotado.

Demostración:
De acuerdo con la proposición 4.14, sólo hay que probar:

$$(1-\cos t)^{ap+(2-p)(2\alpha+1)/4}(1+\cos t)^{bp+(2-p)(2\beta+1)/4} \in A_p((0,\pi)).$$

Pero como $1-\cos t \sim t^2$ y $1+\cos t \sim (\pi - t)^2$ en $(0,\pi)$, esto equivale a:

$$t^{2ap+(2-p)(2\alpha+1)/2}(\pi - t)^{2bp+(2-p)(2\beta+1)/2} \in A_p((0,\pi)),$$

lo que a su vez, según vimos en los teoremas 1.36 y 1.39, equivale a las condiciones:

$$2ap + (2-p)(2\alpha+1)/2 > -1; \tag{4.21}$$

$$2ap + (2-p)(2\alpha+1)/2 < p-1; \tag{4.22}$$

$$2bp + (2-p)(2\beta+1)/2 > -1; \tag{4.23}$$

$$2bp + (2-p)(2\beta+1)/2 < p-1. \tag{4.24}$$

Estas condiciones son las de la hipótesis:

$$(4.21) \Leftrightarrow 2ap + (2-p)(2\alpha+1)/2 > -1 \Leftrightarrow a + (\alpha+1/2)(1/p-1/2) > -1/(2p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + (\alpha+1)(1/p-1/2) > -1/4;$$

$$(4.22) \Leftrightarrow 2ap + (2-p)(2\alpha+1)/2 < p-1 \Leftrightarrow a + (\alpha+1/2)(1/p-1/2) < 1/2 - 1/(2p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + (\alpha+1)(1/p-1/2) < 1/4;$$

Lo mismo sucede con (4.23) y (4.24), con lo que el corolario está demostrado.

Observación: nótese que de este resultado se obtiene también el intervalo exacto de convergencia en media de la serie de Fourier.

Otro sistema ortonormal cuya trasposición al intervalo $(0,\pi)$ da lugar a un sistema $\{u_n\}$ que satisface las hipótesis del corolario 4.13 es el sistema de Bessel, $\{j_n\}$, de orden $\alpha \geq -1/2$. Como ya vimos, si J_α es la función de Bessel de orden $\alpha > -1$ y $\{\alpha_n\}$ es la sucesión de sus ceros, en orden creciente, se define

$$j_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{|J_{\alpha+1}(\alpha_n)|} J_\alpha(\alpha_n x)$$

y $\{j_n\}$ resulta ser un sistema ortonormal en $(0,1)$ con respecto a $x\,dx$. El paso al intervalo $(0,\pi)$ es ahora una simple dilatación $y = \pi x$:

$$\int_0^1 j_n(x) j_m(x) x\,dx = \int_0^\pi j_n(\pi^{-1}y) j_m(\pi^{-1}y)\pi^{-2} y\,dy =$$

$$= \int_0^\pi [\pi^{-1}y^{1/2} j_n(\pi^{-1}y)][\pi^{-1}y^{1/2} j_m(\pi^{-1}y)]\,dy.$$

El sistema determinado por $u_n(x) = \pi^{-1}x^{1/2} j_n(\pi^{-1}x)$ es ortonormal en $(0,\pi)$ y, cuando $\alpha \geq -1/2$, satisface (4.4),..., (4.8) (véase [G]). Podemos obtener el mismo tipo de resultados que para el operador maximal de la serie de Fourier-Jacobi, con la particularidad de que ahora la condición sobre el peso sí es una condición A_p sobre el intervalo original $(0,1)$:

Proposición 4.16. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$. Sea S^* el operador maximal de la serie de Fourier-Bessel de orden α y sea u un peso en el intervalo $(0,1)$. Si $u(y)y^{1-p/2} \in A_p((0,1))$, entonces*

$$S^* : L^p(u(x)x\,dx) \longrightarrow L^p(u(x)x\,dx)$$

es un operador acotado.

Demostración:
Denotemos por S_n las sumas parciales de la serie de Fourier-Bessel, por S'_n las de la serie de Fourier con respecto a $\{u_n\}$ y $(S')^*$ el operador maximal de S'_n. Entonces, para cada función f sobre $(0,1)$ que admita desarrollo de Fourier-Bessel,

$$S_n(f,\pi^{-1}t) = \int_0^1 f(x) \sum_{m=0}^n j_m(\pi^{-1}t) j_m(x) x\,dx =$$

$$= \int_0^\pi f(\pi^{-1}y) \sum_{m=0}^n j_m(\pi^{-1}t) j_m(\pi^{-1}y)\pi^{-2} y\,dy =$$

$$= t^{-1/2} \int_0^\pi f(\pi^{-1}y) y^{1/2} \sum_{m=0}^n [\pi^{-1}t^{1/2} j_m(\pi^{-1}t)][\pi^{-1}y^{1/2} j_m(\pi^{-1}y)]\,dy =$$

$$= t^{-1/2}\int_0^\pi f(\pi^{-1}y)y^{1/2}\sum_{m=0}^{n} u_m(t)u_m(y)\,dy =$$

$$= t^{-1/2}S_n'(f(\pi^{-1}y)y^{1/2},t) = t^{-1/2}S_n'(g,t),$$

con $g(t) = f(\pi^{-1}t)t^{1/2}$. Por lo tanto:

$$S^*(f,\pi^{-1}t) = t^{-1/2}(S')^*(g,t).$$

Luego

$$\|S^*(f,x)\|_{L^p(u(x)x\,dx)} \le C\|f(x)\|_{L^p(u(x)x\,dx)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|S^*(f,\pi^{-1}t)\|_{L^p(u(\pi^{-1}t)t\,dt)} \le C\|f(\pi^{-1}t)\|_{L^p(u(\pi^{-1}t)t\,dt)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|(S')^*(g,t)\|_{L^p(u(\pi^{-1}t)t^{1-p/2}\,dt)} \le C\|g(t)\|_{L^p(u(\pi^{-1}t)t^{1-p/2}\,dt)}.$$

Y, según el corolario 4.13 esto es cierto si $u(\pi^{-1}t)t^{1-p/2} \in A_p((0,\pi))$. Ahora bien, $u(\pi^{-1}t)t^{1-p/2} \in A_p((0,\pi)) \Leftrightarrow \forall a,b$ tales que $0 \le a \le b \le 1$,

$$\int_{\pi a}^{\pi b} u(\pi^{-1}t)t^{1-p/2}\,dt\left(\int_{\pi a}^{\pi b}\left[u(\pi^{-1}t)t^{1-p/2}\right]^{-q/p}\,dt\right)^{p/q} \le C(\pi b-\pi a)^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b u(y)y^{1-p/2}\,dt\left(\int_a^b\left[u(y)y^{1-p/2}\right]^{-q/p}\,dt\right)^{p/q} \le C(b-a)^p,\ 0\le a\le b\le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(y)y^{1-p/2} \in A_p((0,1)),$$

como queríamos demostrar.

Observación: usando la propiedad de que $(u,v) \in A_p^\delta \Rightarrow \exists w \in A_p$ tal que $c_1u \le w \le c_2v$, con dos constantes positivas c_1 y c_2 (teorema 1.33 de Neugebauer), pueden establecerse resultados análogos a los anteriores para el caso de la acotación con dos pesos.

El teorema 4.7, que generaliza el resultado de Gilbert con pesos de la clase A_p, permite obtener otros resultados al considerar sistemas particulares $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ distintos o incluso otras sucesiones $\{r_{n,k}\}$. Por ejemplo:

Teorema 4.17. *Sean $\alpha,\beta,\gamma,\delta \ge -1/2$, $1<p<\infty$, $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ y $d\nu(x) = (1-x)^\gamma(1+x)^\delta\,dx$ sobre el intervalo $(-1,1)$. Sean $\{P_n^{\alpha,\beta}\}$ y $\{P_n^{\gamma,\delta}\}$ sus respectivos polinomios de Jacobi, ortonormalizados. Supongamos que se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$4\frac{\gamma+1}{2\gamma+3} < p < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}, \qquad 4\frac{\delta+1}{2\delta+3} < p < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}; \tag{4.25}$$

$$0 \leq (2-p)(\alpha-\gamma), \qquad 0 \leq (2-p)(\beta-\delta). \tag{4.26}$$

Entonces, para cada $f \in L^p(d\nu)$ existe una $g \in L^p(d\mu)$ con los mismos coeficientes de Fourier que f (en sus respectivos sistemas ortonormales), es decir:

$$\int_{-1}^{1} g(x) P_n^{\alpha,\beta}(x)\, d\mu(x) = \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{\gamma,\delta}(x)\, d\nu(x) \ \forall n \geq 0.$$

Además,

$$\|g\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(d\nu)},$$

donde la constante C no depende de f.

Demostración:
Sean

$$u_n^{\alpha,\beta}(t) = P_n^{\alpha,\beta}(\cos t)(1-\cos t)^{\alpha/2+1/4}(1+\cos t)^{\beta/2+1/4}$$

y

$$u_n^{\gamma,\delta}(t) = P_n^{\gamma,\delta}(\cos t)(1-\cos t)^{\gamma/2+1/4}(1+\cos t)^{\delta/2+1/4},$$

que, como hemos visto anteriormente, forman dos sistemas ortonormales en $(0,1)$. Sea también:

$$r_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k, \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Hemos visto que el operador $\mathcal{S}^*$ asociado es de tipo (p,p)-fuerte en $L^p((-\pi,\pi),w)$ si $w \in A_p((-\pi,\pi))$. Luego el operador $\mathcal{T}^*$ asociado a $\{u_n^{\alpha,\beta}\}$, $\{u_n^{\gamma,\delta}\}$ y $\{r_{n,k}\}$, dado por:

$$\mathcal{T}^*(\phi)(s) = \sup_k \left| \int_0^{\pi} \phi(t) \sum_{n=0}^{k} u_n^{\alpha,\beta}(s) u_n^{\gamma,\delta}(t)\, dt \right|$$

es de tipo (p,p)-fuerte, si $w \in A_p((0,\pi))$, es decir:

$$\|\mathcal{T}^*(\phi)(s)\|_{L^p(w(s)\,ds)} \leq C\|\phi\|_{L^p(w(s)\,ds)} \ \forall \phi \in L^p(w).$$

Como hemos comentado, para la acotación con dos pesos u y v

$$\|\mathcal{T}^*(\phi)(s)\|_{L^p(u(s)\,ds)} \leq C\|\phi\|_{L^p(v(s)\,ds)} \ \forall \phi \in L^p(v) \tag{4.27}$$

basta con $(u,v) \in A_p^{\delta}((0,\pi))$ para algún $\delta > 1$, ya que, si esto es así, existe otro peso $w \in A_p((0,\pi))$ de tal manera que $c_1 u \leq w \leq c_2 v$ para ciertas constantes c_1 y c_2 positivas.
Sea entonces $f \in L^p(d\nu)$ y $a_n = \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{\gamma,\delta}(x)\, d\nu(x)$. Definamos, para cada número natural k,

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n P_n^{\alpha,\beta}(x) = \int_{-1}^{1} f(y) \sum_{n=0}^{k} P_n^{\gamma,\delta}(y) P_n^{\alpha,\beta}(x)(1-y)^{\gamma}(1+y)^{\delta}\, dy;$$

$$g_k(\cos s) = \int_0^\pi f(\cos t) \sum_{n=0}^{k} P_n^{\gamma,\delta}(\cos t) P_n^{\alpha,\beta}(\cos s)(1-\cos t)^{\gamma+1/2}(1+\cos t)^{\delta+1/2}\, dt =$$

$$= \int_0^\pi f(\cos t)(1-\cos t)^{\gamma/2+1/4}(1+\cos t)^{\delta/2+1/4} \sum_{n=0}^{k} P_n^{\alpha,\beta}(\cos s) u_n^{\gamma,\delta}(t)\, dt =$$

$$= (1-\cos s)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+\cos s)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \int_0^\pi f(\cos t)(1-\cos t)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}}(1+\cos t)^{\frac{\delta}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{k} u_n^{\alpha,\beta}(s) u_n^{\gamma,\delta}(t)\, dt,$$

luego

$$\sup_k |g_k(\cos s)| = (1-\cos s)^{-\alpha/2-1/4}(1+\cos s)^{-\beta/2-1/4}\mathcal{T}^*(\phi)(s),$$

donde $\phi(s) = f(\cos s)(1-\cos s)^{\gamma/2+1/4}(1+\cos s)^{\delta/2+1/4}$.
Entonces,

$$\|g_k(x)\|_{L^p((1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx)} =$$

$$= \|g_k(\cos s)\|_{L^p((1-\cos s)^{\alpha+1/2}(1+\cos s)^{\beta+1/2}\, ds)} \leq$$

$$\leq \|(1-\cos s)^{-\alpha/2-1/4}(1+\cos s)^{-\beta/2-1/4}\mathcal{T}^*(\phi)(s)\|_{L^p((1-\cos s)^{\alpha+1/2}(1+\cos s)^{\beta+1/2}\, ds)} =$$

$$= \|\mathcal{T}^*(\phi)(s)\|_{L^p((1-\cos s)^{(1-p/2)(\alpha+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\beta+1/2)}\, ds)}.$$

Admitamos que $\mathcal{T}^*$ es un operador acotado de

$$L^p((1-\cos s)^{(1-p/2)(\gamma+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\delta+1/2)})$$

en

$$L^p((1-\cos s)^{(1-p/2)(\alpha+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\beta+1/2)}),$$

lo que probaremos más adelante. Si esto es así, resulta:

$$\|\mathcal{T}^*(\phi)(s)\|_{L^p((1-\cos s)^{(1-p/2)(\alpha+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\beta+1/2)}\, ds)} \leq$$

$$\leq C\|\phi(s)\|_{L^p((1-\cos s)^{(1-p/2)(\gamma+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\delta+1/2)}\, ds)} =$$

$$= C\|f(\cos s)\|_{L^p((1-\cos s)^{\gamma+1/2}(1+\cos s)^{\delta+1/2}\, ds)} = C\|f(x)\|_{L^p((1-x)^\gamma(1+x)^\delta\, dx)},$$

con lo cual $\|g_k\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(d\nu)}$.
Se tiene entonces que la sucesión $\{g_k\}$ contiene una subsucesión $\{g_{k_j}\}$ que converge débilmente a una función $g \in L^p(d\mu)$. Es decir:

$$\int_{-1}^1 gh\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{-1}^1 g_{k_j} h\, d\mu \ \forall h \in L^q(d\mu)$$

Por consiguiente:

$$\int_{-1}^{1} g P_n^{\alpha,\beta}\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{-1}^{1} g_{k_j} P_n^{\alpha,\beta}\, d\mu = a_n$$

y además,

$$\|g\|_{L^p(d\mu)} \le \sup_j \|g_{k_j}\|_{L^p(d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(d\nu)}$$

como queremos demostrar.
Para obtener el resultado, sólo tenemos que probar que $\mathcal{T}^*$ es un operador acotado de

$$L^p\big((1-\cos s)^{(1-p/2)(\gamma+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\delta+1/2)}\big)$$

en

$$L^p\big((1-\cos s)^{(1-p/2)(\alpha+1/2)}(1+\cos s)^{(1-p/2)(\beta+1/2)}\big).$$

Como $1-\cos s \sim s^2$ y $1+\cos s \sim (\pi-s)^2$ en $(0,\pi)$, ello equivale a probar que $\mathcal{T}^*$ es un operador acotado de

$$L^p\big(s^{(2-p)(\gamma+1/2)}(\pi-s)^{(2-p)(\delta+1/2)}\big)$$

en

$$L^p\big(s^{(2-p)(\alpha+1/2)}(\pi-s)^{(2-p)(\beta+1/2)}\big).$$

Es suficiente ver, por (4.27), que para algún $\delta > 1$,

$$\big(s^{(2-p)(\gamma+1/2)}(\pi-s)^{(2-p)(\delta+1/2)}, s^{(2-p)(\alpha+1/2)}(\pi-s)^{(2-p)(\beta+1/2)}\big) \in A_p^\delta((0,\pi)).$$

Pero según vimos en los teoremas 1.33 y 1.39, esta condición se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -1 &< (2-p)(\alpha+1/2); & -1 &< (2-p)(\beta+1/2);\\ (2-p)(\gamma+1/2) &< p-1; & (2-p)(\delta+1/2) &< p-1;\\ (2-p)(\gamma+1/2) &\le (2-p)(\alpha+1/2); & (2-p)(\delta+1/2) &\le (2-p)(\beta+1/2). \end{aligned}$$

Estas desigualdades equivalen a (4.25) y (4.26), y el teorema queda probado.

Notas: a) Eligiendo otras sucesiones $\{r_{n,k}\}$ que verifiquen las hipótesis de Gilbert, es posible obtener de la misma manera resultados similares, en el sentido de que a cada función $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\gamma,\delta}$ asocian una $g \sim \sum_{n=0}^{\infty} m_n a_n P_n^{\alpha,\beta}$.
b) Teoremas de este tipo han sido obtenidos por Askey ([A]) y Muckenhoupt ([Mu 5]), no para los polinomios $P_n^{\alpha,\beta}$ y $P_n^{\gamma,\delta}$ sino para las funciones ortonormales correspondientes.

§3. Divergencia en casi todo punto de la serie de Fourier

Hasta ahora sólo hemos hablado, para sistemas particulares, del intervalo de p donde podemos asegurar la convergencia en casi todo punto (bien directamente o bien por medio de la acotación del operador maximal). En este último apartado, trataremos de determinar lo que ocurre fuera de dicho intervalo.

Por ejemplo, para las series de Fourier-Legendre sabemos que hay convergencia en casi todo punto en L^p si $p > 4/3$. Para $p < 4/3$, se puede ver ([Sz 2]) que la serie de Fourier de la función $(1-x)^{-3/4}$ diverge en todo punto. Esto lo hace notar Pollard en [P 3], donde plantea el problema de la convergencia en $L^{4/3}$. En 1983, Meaney (véase [M]) responde a esta cuestión, demostrando que existe una función en $L^{4/3}$ cuya serie de Fourier-Legendre diverge en casi todo punto. Como ya es habitual, el resultado se extiende al caso de series de Fourier-Jacobi para $\alpha, \beta \geq -1/2$.

Badkov (véase [B]), al estudiar el operador maximal en los casos que trata, también logra demostrar que en los espacios L^p en los que el operador maximal no está acotado, se puede encontrar una función cuya serie de Fourier o bien no existe, o bien diverge en casi todo punto.

El método de Badkov y de Meaney consiste en usar estimaciones para la norma de los polinomios en L^q, donde $1/p + 1/q = 1$, y estimaciones asintóticas para los polinomios del tipo de (4.1).

Nuestra aportación en este tema es la observación de que sólo hace falta una cota inferior sobre la norma de los polinomios para obtener un resultado de divergencia. Utilizaremos el teorema 1.11, de Máté, Nevai y Totik, cuyo enunciado es el siguiente:

Sea $d\mu$ una medida sobre $[-1,1]$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto. Sea $0 < r \leq \infty$. Existe una constante C tal que, si g es una función medible Lebesgue en $[-1,1]$, entonces:

$$\|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}g(x)\|_{L^r(dx)} \leq C \varliminf_{n\to\infty} \|P_n g\|_{L^r(dx)}.$$

En particular, si $\varliminf_{n\to\infty} \|P_n g\|_{L^r(dx)} = 0$, entonces $g = 0$ en casi todo punto.

Como consecuencia, podemos probar un teorema sobre divergencia, válido para la serie de Fourier relativa a polinomios ortonormales con respecto a una medida cuya parte absolutamente continua sea positiva en casi todo punto:

Teorema 4.18. *Sea $d\mu$ una medida sobre $[-1,1]$ con $\mu' > 0$ en casi todo punto y supongamos que $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Si*

$$\mu'(x)^{1-q/2}(1-x^2)^{-q/4} \notin L^1(dx), \tag{4.28}$$

entonces existe $f \in L^p(d\mu)$ tal que $S_n f$ diverge en casi todo punto de $[-1,1]$.

Demostración:
Si $f \in L^p(d\mu)$, entonces $S_n f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) P_k(x)$, donde $\{P_k\}$ es la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$ y

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} f P_k \, d\mu.$$

Consideremos los operadores $c_n : L^p(d\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por la expresión anterior; por dualidad,

$$\|c_n\| = \|P_n\|_{L^q(d\mu)} \geq \|P_n(x)\mu'(x)^{1/q}\|_{L^q(dx)}$$

y, según el resultado de Máté, Nevai y Totik antes citado,

$$\sup_n \|c_n\| = +\infty.$$

Entonces, el teorema de Banach-Steinhaus asegura la existencia de una función $f \in L^p(d\mu)$ tal que $\sup_n |c_n(f)| = +\infty$. Supongamos que $S_n f$ converge en un conjunto E de medida de Lebesgue $|E|$ positiva. Esto implica que $c_n(f)P_n(x) \longrightarrow 0$ en E, luego

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n(x) = 0 \text{ en } E,$$

por ser $\sup_n |c_n(f)| = +\infty$. Pero entonces existe un subconjunto D de E y de medida positiva (tan próxima a $|E|$ como queramos) tal que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n(x) = 0 \text{ uniformemente en } D,$$

con lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \chi_D P_n \, d\mu = 0.$$

Pero de esta igualdad, aplicando de nuevo el resultado de Máté, Nevai y Totik, con $r = 1$ y $g = \chi_D \mu'$, se deduce que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \chi_D \mu'(x)^{1/2}(1-x^2)^{-1/4} \, dx = 0,$$

lo que implica $\mu' = 0$ en D, contra la hipótesis. Por lo tanto, $S_n f$ diverge en casi todo punto, lo que prueba el teorema.

Este teorema extiende el resultado de Meaney para polinomios de Jacobi, sin la restricción $\alpha, \beta \geq -1/2$:

Corolario 4.19. *Sean $\alpha > -1/2$, $\alpha \geq \beta > -1$, $d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx$ sobre $[-1,1]$ y $p = 4(\alpha+1)/(2\alpha+3)$. Entonces existe $f \in L^p(d\mu)$ cuya serie de Fourier-Jacobi diverge en casi todo punto de $[-1,1]$.*

Demostración:
Basta comprobar que se cumple la condición (4.28).

Otra sencilla consecuencia del teorema es la siguiente:

Corolario 4.20. *Existe un sistema de polinomios ortonormales en* $[-1, 1]$ *tal que la serie de Fourier correspondiente no puede converger en casi todo punto para toda función* $f \in L^p(d\mu)$*, con* $p < 2$*.*

Demostración:
Si tomamos la medida $d\mu(x) = e^{-1/|x|}\, dx$, es fácil comprobar que se cumple (4.28) para todo $p < 2$ (es decir, $q > 2$).

Nota: el teorema 4.18 no proporciona ningún resultado cuando $p = 2$. De hecho, permanece abierta la cuestión de si para cualquier medida μ en $[-1, 1]$, la serie de Fourier relativa a sus polinomios ortonormales converge en casi todo punto para toda función de $L^2(d\mu)$. Puede verse un resultado parcial en [Nv], corolario 8.5, pág. 150, que asegura la convergencia imponiendo condiciones de suavidad a μ'. Por el contrario, existen sistemas ortonormales (no formados por polinomios) para los cuales hay funciones de L^2 con serie de Fourier divergente en casi todo punto (véase [O], capítulo III, § 2).

El teorema 4.18 se puede extender a espacios L^p con pesos de la siguiente forma:

Teorema 4.21. *Sea* $d\mu$ *una medida sobre* $[-1, 1]$ *con* $\mu' > 0$ *en casi todo punto y supongamos que* $1 < p \le q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$*. Sea* v *una función positiva y medible Borel en* $[-1, 1]$*. Si* $v^{-1} \notin L^q(d\mu)$ *o*

$$\mu'(x)^{1-q/2}(1 - x^2)^{-q/4} v(x)^{-q} \notin L^1(dx),$$

entonces existe una $f \in L^p(v^p\, d\mu)$ *tal que o bien no existe* $S_n f$*, o bien diverge en casi todo punto de* $[-1, 1]$*.*

Demostración:
Supongamos que $S_n f$ existe y converge en algún conjunto de medida positiva, para toda $f \in L^p(v^p\, d\mu)$. Puesto que existe

$$c_0(f) = \int_{-1}^{1} f(x) P_0\, d\mu(x) = \int_{-1}^{1} (vf)(P_0 v^{-1})\, d\mu(x)\ \forall vf \in L^p(d\mu),$$

debe ser $P_0 v^{-1} \in L^q(d\mu)$, es decir: $v^{-1} \in L^q(d\mu)$. Y ahora, si $v^{-1} \in L^q(d\mu)$, existe $c_k(f)$ para toda $f \in L^p(v^p\, d\mu)$ y podemos continuar de manera análoga a como lo hacíamos en el teorema 4.18.

Como consecuencia, se puede enunciar el resultado correspondiente al corolario 4.19, con un peso $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$.

Podemos enunciar también el teorema 4.21 imponiendo la hipótesis

$$\sup_n \|P_n v^{-1}\|_{L^q(d\mu)} = +\infty$$

en lugar de

$$\mu'(x)^{1-q/2}(1-x^2)^{-q/4}v(x)^{-q} \notin L^1(dx).$$

En este sentido, el resultado que hemos obtenido generaliza el de Badkov ([B], teorema 6.3), ya que este impone otras condiciones adicionales.

En cuanto al sistema de Bessel, ya hemos visto en el segundo capítulo que se tiene una fórmula similar (véase [V], teorema 5.15) a la que Máté, Nevai y Totik probaron para sistemas de polinomios: si $\alpha > -1$ y $1 \le p < \infty$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^1 h(x)x^{-p/2}\,dx \le C \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 h(x)|j_n(x)|^p\,dx$$

para toda función h medible y no negativa sobre $[0,1]$.

Usando este resultado en lugar del de Máté, Nevai y Totik, se demuestra lo análogo al teorema 4.21:

Teorema 4.22. *Sean $\alpha > -1$ y $1 < p \le q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sea v una función positiva y medible Borel en $[0,1]$. Si*

$$v(x)^{-q}x^{\alpha q+1} \notin L^1(dx)$$

o

$$v(x)^{-q}x^{1-q/2} \notin L^1(dx),$$

entonces existe una $f \in L^p(v^p x\,dx)$ cuya serie de Fourier-Bessel de orden α o no existe o diverge en casi todo punto de $[-1,1]$.

Observación. En el caso de los polinomios de Jacobi con $\alpha, \beta \ge -1/2$, los corolarios 4.15 y 4.19 dejan cerrado el problema de la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier para los espacios de Lebesgue L^p. Es decir, existe un $p = p(\alpha,\beta)$ tal que

$$S_n f(x) \longrightarrow f(x) \text{ en casi todo punto, } \forall f \in \bigcup_{r>p} L^r(d\mu)$$

y $S_n f(x)$ diverge en casi todo punto para alguna $f \in L^p(d\mu)$, donde $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ sobre $[-1,1]$.

Este estudio se puede extender a los espacios de Lorentz. Por ejemplo, Colzani ([Co]) ha estudiado la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier-Legendre en los espacios $L^{4/3,r}$ y ha obtenido el siguiente resultado:

Teorema.

a) Las sumas parciales $S_n f(x)$ de la serie de Fourier-Legendre de cualquier función $f \in L^{4/3,1}([-1,1])$ convergen en casi todo punto a f.

b) Si $1 < r \leq \infty$, existe una función $f \in L^{4/3,r}([-1,1])$ tal que $S_n f(x)$ diverge en todo punto de $[-1,1]$.

En el caso general, si $\{P_n\}$ es un sistema de polinomios ortonormales con respecto a una medida μ en $[-1,1]$, podemos seguir las ideas del teorema 4.18 y probar el siguiente resultado:

Proposición 4.23. *Sea μ una medida en $[-1,1]$, $\mu' > 0$ en casi todo punto y $\{P_n\}$ su sistema de polinomios ortonormales. Sea $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < s < \infty$, $1/s + 1/r = 1$. Si*

$$\sup_n \|P_n\|_{L^{q,r}(d\mu)} = +\infty, \tag{4.29}$$

entonces existe una función $f \in L^{p,s}(d\mu)$ cuya serie de Fourier respecto del sistema $\{P_n\}$ diverge en casi todo punto de $[-1,1]$.

<u>Demostración</u>:
Si llamamos $c_k(f)$ a los coeficientes de Fourier de $f \in L^{p,s}(d\mu)$, la norma de los operadores $c_k : L^{p,s}(d\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ es, por dualidad,

$$\|P_n\|_{L^{q,r}(d\mu)}.$$

Como los espacios de Lorentz son espacios de Banach, podemos utilizar el teorema de Banach-Steinhaus y continuar como en el teorema 4.18.

La condición (4.29) se puede utilizar en los casos en que conozcamos expresiones asintóticas de los polinomios. Por ejemplo, para los polinomios de Legendre, puede demostrarse que $\|P_n\|_{L^{4,s}(dx)} \sim [\log(2+n)]^{1/s}$ (véase [Co]); basta entonces utilizar la proposición anterior y obtenemos la parte b) del teorema de Colzani, si bien con divergencia en casi todo punto.

Pero en el caso general no es posible determinar si se cumple (4.29). Sería interesante conocer acotaciones inferiores para las normas de los polinomios en $L^{p,r}(d\mu)$; es decir, algún resultado similar al teorema 1.11 de Máté, Nevai y Totik para las normas en $L^p(d\mu)$. Este es uno de los temas en los que estamos investigando actualmente.

REFERENCIAS

[A] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi series, Illinois J. Math. 13 (1969), 583–590.

[AW] R. Askey, S. Wainger, Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series, Amer. J. Math. 87 (1965), 695–708.

[B] V. M. Badkov, Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval, Math USSR Sb. 24 (1974), 223–256.

[BP 1] A. I. Benedek, R. Panzone, On mean convergence of Fourier-Bessel series of negative order, Studies in App. Math. 50 (1971), 281–292.

[BP 2] A. I. Benedek, R. Panzone, Mean convergence of Bessel functions, Rev. Un. Mat. Arg. 26 (1972), 42–61.

[BP 3] A. I. Benedek, R. Panzone, Pointwise convergence of series of Bessel functions, Rev. Un. Mat. Arg. 26 (1972), 167–186.

[C] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116 (1966), 135–157.

[CJR] R. Coifman, P. W. Jones, J. L. Rubio de Francia, Constructive decomposition of B.M.O. functions and factorization of A_p weights, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 675–676.

[Co] L. Colzani, Convergence of expansions in Legendre polynomials (preprint).

[Ch] S. Chanillo, On the weak behaviour of partial sums of Legendre series, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 367–376.

[GR] J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, "Weighted norm inequalities and related topics", North-Holland, Amsterdam, 1985.

[G] J. E. Gilbert, Maximal theorems for some orthogonal series. I, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 495–515.

[Go] E. Godoy, "Polinomios ortogonales asociados a modificaciones de medidas". Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela, 1987.

[GPV] J. J. Guadalupe, M. Pérez, J. L. Varona, Weak behaviour of Fourier-Jacobi series, J. Approx. Theory (por aparecer). *Publicado: 61 (1990), 222–238.*

[GPRV] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz, J. L. Varona, L^p-boundedness of the kernels relative to generalized Jacobi weights. Actas del VI simposio sobre polinomios ortogonales y sus aplicaciones (1989), Gijón (por aparecer). *Publicado: Universidad de Oviedo, Gijón, 1990, 168–178.*

[H] A. Haar, Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen, Math. Ann. 78 (1917), 121–136.

[Hu 1] R. Hunt, On $L(p,q)$ spaces, Enseign. Math. 12 (1966), 249–275.

[Hu 2] R. Hunt, On the convergence of Fourier series, Proc. Conf. Orthogonal Expansions and Continuous Analogues, 235-255. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., 1968.

[HMW] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227–251.

[HY] R. Hunt, W. S. Young, A weighted norm inequality for Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 274–277.

[J] P. W. Jones, Factorization of A_p weights, Ann. Math. 111 (1980), 511–530.

[K] T. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, Canad. Math. Bull. 27 (1984), 205–214.

[MNT 1] A. Máté, P. Nevai, V. Totik, Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials, J. Approx. Theory 46 (1986), 314–322.

[MNT 2] A. Máté, P. Nevai, V. Totik, Extensions of Szegő's Theory of Orthogonal Polynomials. II, Constr. Approx. 3 (1987), 51–72.

[M] C. Meaney, Divergent Jacobi polynomial series, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 459–462.

[Mu 1] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 306–310.

[Mu 2] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 419–431.

[Mu 3] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II, Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 433–460.

[Mu 4] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207–226.

[Mu 5] B. MUCKENHOUPT, "Transplantation theorems and multiplier theorems for Jacobi series", Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 64, nº 356, Providence, R.I., U.S.A., 1986.

[MS] B. MUCKENHOUPT, E. M. STEIN, Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), 17–92.

[N] C. J. NEUGEBAUER, Inserting A_p-weights, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 644–648.

[Nv] P. NEVAI, "Orthogonal Polynomials", Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 18, nº 213, Providence, R.I., U.S.A., 1979.

[NR] J. NEWMAN, W. RUDIN, Mean convergence of orthogonal series, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 219–222.

[O] A. M. OLEVSKIĬ, "Fourier series with respect to general orthogonal systems", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 86, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[P 1] H. POLLARD, The mean convergence of orthogonal series. II, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 355–367.

[P 2] H. POLLARD, The mean convergence of orthogonal series. III, Duke Math. J. 16 (1949), 189–191.

[P 3] H. POLLARD, The convergence almost everywhere of Legendre series, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 442–444.

[R 1] E. A. RAHMANOV, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, Math. USSR Sb. 32 (1977), 199–213.

[R 2] E. A. RAHMANOV, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II, Math. USSR Sb. 46 (1983), 199–213.

[S 1] E. M. STEIN, On limits of sequences of operators, Ann. of Math. 74 (1961), 140–170.

[S 2] E. M. STEIN, "Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory", Annals of Math. Study nº 63, Princeton (1970).

[SW] E. M. STEIN, G. WEISS, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Univ. Press, New Jersey, 1975.

[Sz 1] G. SZEGŐ, Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome, Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, naturwissenschaftliche Klasse, 10 (1933), 35–112.

[Sz 2] G. Szegő, “Orthogonal polynomials”, 3ª ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

[T] E. C. Titchmarsh, “Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations”, vol. 1, 2ª ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1962.

[V] J. L. Varona, “Convergencia en L^p con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales”. Tesis doctoral. Sem. Mat. García de Galdeano, sec. 2, nº 22. Zaragoza, 1989.

[W] G. N. Watson, “A treatise on the theory of Bessel functions”, 2ª ed., Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1958.

[Wi] G. M. Wing, The mean convergence of orthogonal series, Amer. J. Math. 72 (1950), 792–808.