Las series para $1/\pi$ de S. Ramanujan

$$\frac{16}{\pi} = 5 + \frac{47}{64}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{89}{64^2}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 + \frac{131}{64^3}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots.$$

Jesús Guillera

Universidad de Zaragoza

AÑO DEDICADO A SRINIVASA RAMANUJAN

Universidad de Sevilla

19 de Febrero de 2020

El primer algoritmo

Arquímedes (300 a.C.): π es el perímetro de un círculo de diámetro unidad. Aproximación con polígonos inscritos y circunscritos.

Método de duplicación: $6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96, \ldots$ (T. de Pitágoras).

Polígonos inscritos:

$$48 \text{ lados:} \quad 48 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \simeq 3{,}1393,$$

$$96 \text{ lados:} \quad 96 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \simeq 3{,}1410.$$

Otros: Aryabhata (siglo VI), Cusanus (siglo XV - equivalente), Van Ceulen (siglo XVI) halló 35 dígitos de π. Hasta el año 1630.

Cálculo y naturaleza de π (1)

Newton y Leibniz desarrollan el cálculo infinitesimal $1665 - 1680$.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots, \quad |x| \leq 1,$$

Fórmula de Sharp (1699):

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right).$$

En 1706 John Machin calculó 100 dígitos de π con su fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Una vez conocida es fácil de verificar: $(5+i)^4 = 2(1+i)(239+i)$.

Lambert demuestra en 1761 que π es un número irracional:

$$\pi \neq \frac{n}{m}, \qquad mx = n \ \Rightarrow \ x \neq \pi \qquad \text{(si } n \text{ y } m \text{ son enteros).}$$

Cálculo y naturaleza de π (2)

Gauss (1777-1855) demostró la siguiente fórmula de tipo Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}.$$

En 1853 se conocían 530 decimales de π.

Lindemann, usando la fórmula de Euler $e^{i\pi} = -1$, demuestra en el año 1882 que π es un número trascendente. Esto quiere decir que si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

es un polinomio con coeficientes enteros y $P(x) = 0$ entonces $x \neq \pi$.

Ramanujan (1914): artículo con 17 extraordinarias series para $1/\pi$.

Récord de cálculo de π de 1981 (con una fórmula de tipo Machin): 2 millones de dígitos (Ya había ordenadores).

Record mundial de cálculo de decimales de π de 1985

Las series de Ramanujan para $1/\pi$ se olvidaron hasta que en Noviembre de 1985 William Gosper con una de ellas, a saber

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{26390n + 1103}{396^{4n}}, \qquad (\simeq 8 \text{ díg/térm}),$$

calculó 17,526,100 dígitos del número π batiendo un record mundial. Problema: Ramanujan no había aportado una prueba completa.

¿demostró Ramanujan el valor 1103 o sólo lo intuyó?

$$(n = 0): \quad a \simeq \frac{99^2}{\sqrt{8}\,\pi} \simeq 1103{,}00002683.$$

$$(n = 0, 1): \quad a \simeq 1103{,}0000000000002245.$$

En 1987 J. y P. Borwein demuestran las 17 fórmulas de Ramanujan.

¿De dónde proviene?

$$J_2(q) = q^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^{-24} + 128 + 4096q\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^{24}$$
$$= q^{-1} + 104 + 4372q + 96256q^2 + \cdots,$$

es una función modular de nivel 2 (ecuaciones modulares de todos los grados). Ramanujan, en su artículo sobre series para $1/\pi$, escribe:

$$e^{\pi\sqrt{58}} + 104 + 4372e^{-\pi\sqrt{58}} + 96256e^{-2\pi\sqrt{58}} + \cdots = 396^4,$$

$$J_2(q) = x, \quad J_2(q^{29}) = y, \quad A(x,y) = 0.$$

Una solución de $A(x,x)=0$ es $x_0 = J_2(e^{-\pi\sqrt{\frac{4d}{\ell}}}) = J_2(e^{-\pi\sqrt{58}})$

$$b = \sqrt{58}\sqrt{1-\frac{2^8}{396^4}} = \frac{26390\sqrt{8}}{99^2}.$$

Series de Ramanujan de nivel $\ell = 4$ - Teoría clásica

Nivel $\ell = 4$: coeficientes $\binom{2n}{n}^3$,

$$J_4(q) = q^{-1} + 24 + 276q + 2048q^2 + 11202q^3 + \cdots .$$

En la lista de series que da Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n}} = \frac{16}{\pi}, \qquad q_0 = e^{-\pi\sqrt{7}} = e^{-\pi\sqrt{\frac{4d}{\ell}}}, \quad d = 7.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{(42\sqrt{5}+30)n + (5\sqrt{5}-1)}{(12+4\sqrt{5})^{4n}} = \frac{32}{\pi}, \qquad q_0 = e^{-\pi\sqrt{15}},$$

Ecuaciones modulares de Ramanujan (demostradas por B. Bendt en sus Ramanujan's Notebooks) de grados

$$d = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29, 31,\ 37, 47, 71.$$

D. y G. Chudnovsky (1987), $q = -e^{-\pi\sqrt{163}}$ (14 dígitos/término):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3} \frac{545140134n + 13591409}{(-640320)^{3n}} = \frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi}, \quad (\ell = 1).$$

Más de 31 billones de dígitos de π (Récord 2019).

$$J(q) = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \cdots \ \text{(oeis)}.$$

Chan, Liaw y Tan (2000): $\ell = 3$, $q = -e^{-\pi\sqrt{\frac{d}{\ell}}}$, $q_0 = -e^{-\pi\sqrt{\frac{89}{3}}}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!(2n)!}{(n!)^5} \frac{14151n + 827}{(-300)^{3n}} = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi}, \quad (\simeq 5.4 \text{ díg/térm}).$$

Teoría con $q = -e^{-\pi\sqrt{\frac{4d}{\ell}-1}}$ (G. 2018). Curiosamente Chan y Liaw habían obtenido una ecuación modular de grado $d = 23$.

Series de Ramanujan-Sato para $1/\pi$

Los coeficientes enteros A_n satisfacen cierto tipo de recurrencias orden 3 (Calabi-Yau). Ejemplos de A_n (niveles $\ell \geq 5$) son:

$$\ell = 6, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \quad \text{(Takeshi Sato)},$$

$$\ell = 5, \qquad \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k},$$

$$\ell = 7, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2n}{k} \binom{n+k}{k},$$

$$\ell = 10, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{4n+1}{36^n} = \frac{18}{\pi\sqrt{15}} \quad \text{(Yifan Yang)}.$$

Lista de 93 series racionales (Chan Heng Huat y Shaun Cooper).

Demostraciones sencillas con el método WZ (2002–2003)

En el año 2003 consideré la función

$$g(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{8n} 2^{4k}} \frac{\binom{2n}{n}^3 \binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{n}^2} (6n + 4k + 1).$$

Demostrar que $g(k) = g(k+1)$ es automático si tenemos el programa de Zeilberger (algoritmo WZ de Wilf y Zeilberger).

$$g(0) = g(1) = g(2) = \cdots = \lim_{k \to \infty} g(k) = \lim_{k \to \infty} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} (4k+1) = \frac{4}{\pi},$$

$$k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}, \quad \textit{Stirling } (1730).$$

Y tenemos una demostración elemental de la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{6n+1}{2^{8n}} = \frac{4}{\pi}, \quad \text{Ramanujan (1914).}$$

Pares WZ

El programa de Zeilberger encuentra la función compañera $F(n,k)$:

$$G(n,k)=\frac{1}{2^{8n}2^{4k}}\frac{\binom{2n}{n}^3\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{n}^2}(6n+4k+1),$$

$$F(n,k)=\frac{1}{2^{8n}2^{4k}}\frac{\binom{2n}{n}^3\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{n}^2}8n \quad \text{La llave.}$$

Es un par WZ: $\quad G(n,k+1)-G(n,k)=F(n+1,k)-F(n,k).$

Sumando para $n \geq 0$: $\quad g(k+1)-g(k) = F(1,k)-F(0,k)+F(2,k)-F(1,k)+F(3,k)-F(2,k)+\cdots=0 \implies g(k)=g(k+1).$

Por lo tanto

$$g(a)=g(a+1)=g(a+2)=\cdots=\lim_{k\to\infty}g(a+k)=\lim_{k\to\infty}g(k).$$

Nuevas fórmulas (1)

De forma similar para demostrar

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{2n}{n}^5 \frac{20n^2+8n+1}{2^{12n}} = \frac{8}{\pi^2},$$

tenemos que encontrar una generalización con un parámetro libre k:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{12n}2^{8k}} \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2k}{k}^4}{\binom{n+k}{n}^4}(20n^2+8n+1+24kn+8k^2+4k) = \frac{8}{\pi^2},$$

que demostramos como antes. Primero deducimos que la suma es constante y después:

$$C = \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{2k}{k}^4}{2^{8k}}(4k+1) = \frac{8}{\pi^2}.$$

Nuevas fórmulas (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2n+2k}{n+k}^4}{\binom{2n+k}{n}^4} \frac{1}{2^{20n}2^{8k}} \left(52n^2 + 12n + 1 \right.$$

$$\left. + \; k\,(40n + 8k + 4) - \frac{(2n+1)^5(6n+3+4k)}{16(2n+1+k)^4} \right) = \frac{8}{\pi^2}.$$

Haciendo $k = 0$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{2n}{n}^5 \frac{820n^2 + 180n + 13}{2^{20n}} = \frac{128}{\pi^2}.$$

3 dígitos por término sumado.

Desde 2003 he conjeturado varias fórmulas de aspecto similar a las de Ramanujan pero para $1/\pi^2$. Muestro algunos ejemplos:

$$(G.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(3n)!}{(n!)^7} \frac{252n^2+63n+5}{(-24^4)^n} \stackrel{?}{=} \frac{48}{\pi^2},$$

$$(G.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n)!(2n)!}{(4n)!(n!)^6} \frac{1920n^2+304n+15}{25088^{2n}} \stackrel{?}{=} \frac{56\sqrt{7}}{\pi^2},$$

$$(G.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{5418n^2+693n+29}{(-2880)^{3n}} \stackrel{?}{=} \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2},$$

$$(\text{Almkvist y G.}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{532n^2+126n+9}{10^{6n}} \stackrel{?}{=} \frac{375}{4\pi^2}.$$

Todavía no han podido ser demostradas.

¿Cómo se puede descubrir una fórmula sin demostrarla?

(1) Definimos

$$t_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^6} \, \frac{n^i}{j^{3n}}, \qquad \text{(converge si } j > 36).$$

(2) Damos valores a j, por ejemplo desde $j = 100$ hasta $j = 5000$.

(3) Buscamos relaciones enteras (PSLQ). Entre $\sqrt{5}\pi^{-2}$, t_0, t_1, t_2 encontramos para $j = 2880$ la siguiente combinación lineal:

$$-128\sqrt{5}\pi^{-2} + 29t_0 + 693t_1 + 5418t_2 = 0, \ \text{(con 100 dígitos).}$$

Con 200 dígitos (precisión) los coeficicientes no cambian. Fórmula!:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{5418n^2 + 693n + 29}{2880^{3n}} \stackrel{?}{=} \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2} \ (\simeq 5.7 \text{ díg/térm}).$$

Otros resultados

Series de mayor rango: Una para $1/\pi^3$ descubierta por Boris Gourevitch (2002) y dos para $1/\pi^4$, una encontrada por James Cullen (2010) y la otra por Yue Zhao (2017).

Wadim Zudilin se interesó por las series para $1/\pi^k$, observó su relación con las ecuaciones de CY y generalizó las supercongruencias de Van Hamme ($k=1$) para $k=2,3$, etc. Ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{p-1} \binom{2n}{n}^4 \binom{4n}{2n} \frac{120n^2+34n+3}{2^{16n}} \equiv 3p^2 \pmod{p^5},$$

asociadas a $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^4 \binom{4n}{2n} \frac{120n^2+34n+3}{2^{16n}} = \frac{32}{\pi^2}.$$

para todos los primos impares.

1-) Series de tipo Ramanujan para $1/\pi$:

- Algunas se han podido demostrar con el método WZ.
- Todas con la teoría de formas modulares elípticas.

2-) Series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$:

- Algunas se han podido demostrar con el método WZ.
- Teoría modular ??? Formas modulares elípticas NO.

Recientemente (June, 2019) L. Dembelé, A. Panchishkin, J. Voight, W. Zudilin han observado y reconocido la relación de las series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$ con ciertas formas modulares de Hilbert de peso (2,4). Por ejemplo, los autores sugieren que la fórmula con $J = -24^4$ se explica por la existencia de una forma modular f de Hilbert sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{12})$ de peso $(2,4)$ y nivel 81.

Formas y funciones modulares elípticas

Grupo de congruencias de Hecke:

$$\Gamma_0(\ell) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \; ad - bc = 1, \; c \equiv 0 \mod \ell \right\}.$$

$f(\tau)$ es una forma modular de peso m y nivel ℓ para $\Gamma_0(\ell)$ si f es holomorfa en el semiplano superior complejo y en la cúspide y

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^m f(\tau), \quad \text{(función modular si } m = 0\text{)}.$$

Una función modular f admite un desarrollo de Fourier:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{2\pi i \tau n} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n q^n = f(q), \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Si $\ell = 1$ vemos que el grupo de congruencias es el grupo modular.

El tema de las series de tipo Ramanujan está lejos de haberse agotado... Las investigaciones continuan.

GRACIAS