Método WZ y series para π de tipo Ramanujan

Jesús Guillera

2004

1. Series de Ramanujan para $1/\pi$.

2. Series de tipo Ramanujan para $1/\pi$.

3. El Método WZ de Wilf Y Zeilberger.

4. Búsqueda de series generalizadas. Algoritmo de relaciones enteras.

5. Demostración de las series generalizadas. Algoritmo de Zeilberger (EKHAD).

6. Series generalizadas de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$.

7. Series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$, todavía sin demostrar.

8. Conjeturas.

Símbolo de Pochhammer:

$$a_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$$

$$a_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

$$a_0 = 1, \quad \forall a$$

$$0_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Ramanujan (1887-1920)
Fórmulas de Ramanujan (1914). Son de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{q^n}(an+b) = \frac{d\sqrt{k}}{\pi}$$

siendo $B(n) = n!^{-3} \cdot C(n)$ y $C(n)$ uno de los productos siguientes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n.$$

Fórmulas de Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{1_n^3} \cdot (6n+1) = \frac{4}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{1_n^3} \cdot (42n+5) = \frac{16}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (20n+3) = \frac{8}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (8n+1) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{48^n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (28n+3) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}$$

Más fórmulas de Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (10n+1) = \frac{9\sqrt{2}}{4\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^{4n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (40n+3) = \frac{49\sqrt{3}}{9\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{125}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{1_n^3} \cdot (33n+4) = \frac{15\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{125}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{1_n^3} \cdot (11n+1) = \frac{5\sqrt{15}}{6\pi}$$

Y las más impresionantes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{882^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (21460n + 1123) =$$

$$= \frac{3528}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{99^{4n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^3} \cdot (26390n + 1103) =$$

$$= \frac{9801\sqrt{2}}{4\pi}$$

que da 8 decimales por término

Formulas de tipo Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{1_n^3} \cdot (6n+1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^{3n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{1_n^3} \cdot (5418n + 263) =$$

$$= \frac{640\sqrt{15}}{3\pi}$$

Y la más impresionante: (D. y G. Chudnovsky)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{53360^{3n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{1_n^3} \cdot (545140134n +$$

$$+ 13591409) = \frac{426880\sqrt{10005}}{\pi}$$

Record cómputo de decimales de π: (1991) 2.260.000.000, (1994) 4.0440.000.000

Record actual Kanada (2002), con fórmula tipo Machin. 1.241.100.000.000 decimales de π.

Ramanujan (1914) da un total de 17 fórmulas, demuestra 3 de ellas mediante su teoría ordinaria de ecuaciones modulares y afirma que las demás se demuestran de forma similar utilizando teorías alternativas.

J. Borwein y P. Borwein (1987) demuestran todas las fórmulas de Ramanujan, pero utilizando la teoría ordinaria de funciones elípticas.

D. Chudnovsky y G. Chudnovsky encuentran un nuevo grupo de fórmulas de tipo Ramanujan.

B. Berndt y otros demuestran todas las fórmulas de Ramanujan desarrollando las teorías alternativas.

Chan Heng Huat y otros, cuando ya se creía que se conocían todas las fórmulas de Ramanujan de clase 1, demuestran algunas nuevas fórmulas.

Observando estas fórmulas pienso lo siguiente:

-Si quiero entender la demostración de estas series necesito aprender la teoría de las funciones modulares elípticas.
-¿No habrá otra forma de demostrarlas?

Encuentro en internet una serie extraordinaria que Amdeberham ha demostrado con el método WZ y que da la constante de Apery.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}^5 (2n+1)^5}(205n^2+250n+77) = 64\zeta(3)$$

Y pienso lo siguiente:
Si una serie tan complicada se ha demostrado con el método WZ, tal vez este método también sirva para demostrar las series de tipo Ramanujan.
Pero, ¿Qué es el método WZ?

Pares WZ (Wilf y Zeilberger), paquete EKHAD.

Una función $A(n,k)$ decimos que es hipergeométrica si los cocientes:

$$\frac{A(n+1,k)}{A(n,k)} \qquad \frac{A(n,k+1)}{A(n,k)}$$

son ambos funciones racionales.

Un par de funciones hipergeométricas $F(n,k)$ y $G(n,k)$ es WZ si

$$G(n,k+1) - G(n,k) = F(n+1,k) - F(n,k)$$

Si F(n,k) tiene una compañera con la que forma un par WZ entonces el paquete EKHAD para MAPLE la encuentra.

Método WZ (estrategia 1)

Si F(n,k) y G(n,k) son compañeras WZ y

$$H(n,k) = F(n+1, n+k) + G(n, n+k)$$

entonces Zeilberger ha demostrado que se verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(n,0) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,0)$$

Aplicaciones a la aceleración de series: Consideramos el siguiente par WZ:

$$F(n,k) = \frac{(-1)^k}{(n+k+1)(k+1)(n-k)} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}}$$

$$G(n,k) = \frac{2(-1)^k}{(n+k+1)(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}}$$

y obtenemos:

$$\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)^2\binom{2n}{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}=\zeta(3)$$

que implica:

$$\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\binom{2n}{n}}=\zeta(3)$$

Famosa serie con la que R. Apery demostró la irracionalidad $\zeta(3)$.

Consideramos ahora el par WZ:

$$F(n,k)=\frac{(-1)^k(-1)^n}{2(n+k+1)^2(n-k)}\cdot\frac{1}{\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{2n}{n}}$$

$$G(n,k)=\frac{(5n+3k+5)(n-k)}{(2n+1)(2n+2)}\cdot F(n,k)$$

y obtenemos:

$$\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{30n+19}{(2n+1)^3(n+1)\binom{2n}{n}^2}=$$

$$\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)^2\binom{2n}{n}}=\zeta(3)$$

y finalmente el par WZ:

$$F(n,k)=\frac{(-1)^k(-1)^n}{2(n+k+1)^2(2n-k)}\cdot\frac{1}{\binom{n+k}{k}^2\binom{2n}{k}\binom{2n}{n}^2}$$

$$\frac{G(n,k)}{F(n,k)}=\frac{(2n-k)(30n^2+49n+21nk+13k+19)}{8(2n+1)^3}$$

y obtenemos:

$$\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{205n^2+250n+77}{(2n+1)^5\binom{2n}{n}^5}=$$

$$\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{30n+19}{(2n+1)^3(n+1)\binom{2n}{n}^2}=\zeta(3)$$

Método WZ (estrategia 2)

Sean F(n,k) y G(n,k) compañeras WZ:

$$G(n,k+1)-G(n,k)=F(n+1,k)-F(n,k)$$

Sumamos entre 0 e ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[G(n,k+1)-G(n,k)]=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[F(n+1,k)-F(n,k)]=-F(0,k)$$

por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}G(n,k)=F(0,k)+\sum_{n=0}^{\infty}G(n,k+1)=$$

$$=F(0,k)+F(0,k+1)+\sum_{n=0}^{\infty}G(n,k+2)=\cdots$$

$$\cdots=F(0,k)+F(0,k+1)+F(0,k+2)+\cdots+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}G(n,k)$$

Si se cumple la propiedad siguiente:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k)=0$$

tenemos la estrategia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,0)=\sum_{k=0}^{\infty} F(0,k)$$

Ejemplo, con el par WZ:

$$F(n,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1_n^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}+k\right)_n^2(2k+1)^2}$$

$$G(n,k)=\frac{3n+2k+2}{4n+2}\cdot F(n,k)$$

Obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(0,k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

y por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,0)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1_n^2}{4^n\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}\cdot\frac{3n+2}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{8}$$

Método WZ (estrategia 3)

Sea $G(n,k)$ una función hipergeométrica y supongamos que no sabemos si es cierta o falsa la igualdad siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = cte$$

No hay problema. Un programa (EKHAD) de cálculo simbólico decide la cuestión y si es cierta encuentra una función racional $C(n,k)$ tal que la función:

$$F(n,k) = C(n,k)G(n,k)$$

cumple las condiciones siguientes:

$$F(0,k) = 0$$

$$G(n,k+1) - G(n,k) = F(n+1,k) - F(n,k)$$

Esto constituye una demostración ya que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [G(n,k+1) - G(n,k)] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [F(n+1,k) - F(n,k)] = -F(0,k) = 0$$

lo que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k+1)$$

Más aún, las funciones

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,z)$$

que vamos a considerar son analíticas y tales que $f(z) = O(e^{k|z|})$ con $k < \pi$ para $Re(z) \geq 0$. por lo que se cumplen las condiciones del teorema de Carlson y por lo tanto $f(z) = cte$

Además, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_1(n,k) = cte$$

y definimos:

$$G_2(n,k) = F_1(n+1, n+k) + G_1(n, n+k),$$

$$G_3(n,k) = F_2(n+1, n+k) + G_2(n, n+k),$$

$$G_4(n,k) = F_3(n+1, n+k) + G_3(n, n+k), \quad etc,$$

entonces Zeilberger ha demostrado que también se verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_1(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_2(n,k) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_3(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_4(n,k) = \cdots = cte$$

Lo que permite obtener una cadena de fórmulas.

Búsqueda de series de tipo Ramanujan.

$$B(n,k)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}-k\right)_n\left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2(1+k)_n}$$

Intentamos encontrar fórmulas de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n,k)}{q^n}(an+bk+c)=\frac{f(k)}{\pi}$$

Observando lo que ocurre para $k=1/2, 3/2, 5/2\cdots$ y para $k=-1,-2,-3,\cdots$ podemos sospechar que:

$$f(k)=\frac{g(k)}{\binom{2k}{k}}$$

Observamos también que para $k=0$ la fórmula tiene que ser de Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n,0)}{q^n}(an+c)=\frac{f(0)}{\pi}$$

A continuación buscamos relaciones enteras entre:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n,k)}{q^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n,k)}{q^n} n, \qquad y \qquad \frac{\sqrt{j}}{\pi}$$

para $k = 0, 1, 2, \cdots$

Y llegamos a la serie siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} - k\right)_n \left(\frac{1}{2} + k\right)_n}{1_n^2 (1+k)_n} (6n + 2k + 1) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}$$

El algoritmo es aproximado, opera con decimales, por lo que no podemos estar seguros de que la igualdad sea cierta, aunque sospechamos que si lo es ya que los coeficientes enteros son pequeños y el número de decimales muy grande.

Demostración de la fórmula.
El paquete para MAPLE, EKHAD, demuestra que para los valores enteros de k se verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 (1+k)_n} \cdot$$

$$\cdot (6n+2k+1) \cdot \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = cte$$

encontrando el certificado y por lo tanto la funcion compañera $F(n,k)$:

$$\frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 (1+k)_n} \cdot \frac{n^2}{2n-2k-1} \cdot \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$$

Además se cumplen las condiciones del teorema de Carlson y por lo tanto la igualdad resulta válida para todos los valores reales o complejos de k. Para determinar el valor de la constante damos a k el valor $1/2$.

Fórmulas generalizadas (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 (1+k)_n} (6n+2k+1) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2^{3k}}{\binom{2k}{k}}$$

Fórmulas generalizadas (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}-\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)_n}{1_n^2 (1+k)_n} (20n+2k+3) =$$

$$= \frac{8}{\pi} \cdot \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_1(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_2(n,k)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2n+2k+1)(42n+2k+5)-30kn}{2n+k+1} =$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}$$

Fórmulas generalizadas (3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{4}-\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)_n}{1_n^2 (1+k)_n} (8n+2k+3) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{2^{4k}}{3^k \binom{2k}{k}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_1(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_2(n,k)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n} 3^n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2n+2k+1)(28n+2k+3)-24kn}{2n+k+1} =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3\pi} \cdot \frac{2^{4k}}{3^k \binom{2k}{k}}$$

Otra fórmula generalizada

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{3n}}{2^{9n}}\cdot A(n,k)\cdot R(n,k)=\frac{32\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{2^{3k}}{\binom{2k}{k}}$$

$$A(n,k)=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n\left(\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\right)_n\left(\frac{5}{6}+\frac{k}{3}\right)_n\left(\frac{1}{2}+k\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{3}\right)_n}{1_n^2\left(1+\frac{k}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}$$

$$R(n,k)=$$

$$\frac{(2n+2k+1)(6n+2k+3)}{(2n+1)(6n+3k+3)}\cdot(154n+6k+15)+$$

$$+\frac{kn}{3}\cdot\frac{448k-1216n+608}{(2n+1)(2n+k+1)}$$

Observaciones: para $k=0$, para $k=-1,-2,\cdots$, para $k=1/2,3/2,\cdots$, y para $k=-1/2,-3/2,\cdots$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2n+2k+1)(42n+2k+5)-30kn}{2n+k+1} =$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}3^n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2n+2k+1)(28n+2k+3)-24kn}{2n+k+1} =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3\pi} \cdot \frac{2^{4k}}{3^k \binom{2k}{k}}$$

Otras fórmulas generalizadas:

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{1_n(1+k)_n^2}(6n+4k+1) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2^{4k}}{\binom{2k}{k}^2}$$

El factor constante se puede determinar haciendo $k = 1/2$ y teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n}(1+2n)} = \frac{\pi}{3}$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n(1+k)_n^2}(4n+2k+1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^{4k}}{\binom{2k}{k}^2}$$

El factor constante se puede determinar haciendo $k = 1/2$ y teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Otras fórmulas generalizadas:
(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{1_n (1+k)_n^4} .$$

$$(20n^2 + 8n + 1 + 24kn + 8k^2 + 4k) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{2^{8k}}{\binom{2k}{k}^4}$$

El factor constante se puede determinar haciendo $k = 1/2$ y teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{2^{4n}(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{10}$$

Esta última se puede obtener con el siguiente par WZ:

$$F(n,k) = \frac{(-1)^k}{2^{4k}} \cdot \frac{1}{(n-k)(2k+1)} \cdot \frac{\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}}$$

$$G(n,k) = \frac{(-1)^k}{2^{4k}} \cdot \frac{4}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}}$$

Una variante interesante.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{1_n^3 (1+k)_n^2} \cdot$$

$$\cdot (20n^2 + 12kn + 8n + 2k + 1) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{2^{4k}}{\binom{2k}{k}^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{1}{4}-\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)_n}{1_n^3 (1+k)_n^2} P(n,k) = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{2^{4k}}{\binom{2k}{k}^2}$$

$$P(n,k) = 120n^2 + 84kn + 34n + 10k + 3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_1(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_2(n,k)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n^3}{1_n^3 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^2} \cdot \frac{P(n,k)}{(2n+k+1)^2} =$$

$$\frac{128}{\pi^2} \cdot \frac{2^{4k}}{\binom{2k}{k}^2}$$

$$P(n,k) = (2n+2k+1)^2 (820n^2 + 180n + 10k + 13) +$$

$$+ 4kn(-492n^2 - 236n - 280kn + 84k^2 + 52k + 5)$$

Para $k=0$ obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{1_n^5} \cdot (20n^2+8n+1) = \frac{8}{\pi^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{1_n^5} \cdot (120n^2+34n+3) = \frac{32}{\pi^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{1_n^5} \cdot (820n^2+180n+13) = \frac{128}{\pi^2}$$

Esta última da tres decimales por término.

Una traslación interesante: $n \to n + 1/2$.

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{1_n (1+k)_n^4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^4}{1_k^4} \cdot n(2n+4k+1)$$

produce la fórmula: (estrategia 3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{1_n^5} \cdot (20n^2 + 8n + 1) = \frac{8}{\pi^2}$$

$F(n + 1/2, k)$ produce: (estrategia 2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{1_n^5}{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5 (2n+1)^5} \cdot (10n^2 + 14n + 5) = \frac{7}{2} \cdot \zeta(3)$$

$$F(n,k)=\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^4}{1_n\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^4\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^4}{1_k^4}\cdot$$

$$\cdot n(6n+4k+1)$$

produce la fórmula: (estrategia 3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{1_n^5}\cdot(820n^2+180n+13)=\frac{128}{\pi^2}$$

$F(n+1/2,k)$ produce: (estrategia 2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\cdot\frac{1_n^5}{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5(2n+1)^5}\cdot(205n^2+250n+77)=$$

$$=64\cdot\zeta(3)$$

El tipo de fórmulas que vamos a buscar es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{q^n}(an^2+bn+c) = \frac{d\sqrt{k}}{\pi^2}.$$

siendo $B(n) = n!^{-5} \cdot C(n)$ y $C(n)$ un producto de 5 símbolos de Pochhammer tales como:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{8}\right)_n\left(\frac{3}{8}\right)_n\left(\frac{5}{8}\right)_n\left(\frac{7}{8}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{5}\right)_n\left(\frac{2}{5}\right)_n\left(\frac{3}{5}\right)_n\left(\frac{4}{5}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{12}\right)_n\left(\frac{5}{12}\right)_n\left(\frac{7}{12}\right)_n\left(\frac{11}{12}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{10}\right)_n\left(\frac{3}{10}\right)_n\left(\frac{7}{10}\right)_n\left(\frac{9}{10}\right)_n.$$

Para q vamos a considerar casos tales como:

$$q = j^2, \quad q = j^2 - 1, \quad q = j^3,$$

$$q = (j^2 - 1)^3, \quad q = j^4,$$

con j entero. Vamos a buscar relaciones enteras entre:

$$F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{q^n}, \quad F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{q^n} n,$$

$$F_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{q^n} n^2, \quad G = \frac{\sqrt{k}}{\pi^2}.$$

Esto significa que queremos encontrar enteros a, b, c and d tales que

$$aF_0 + bF_1 + cF_2 + dG = 0, \quad d \neq 0.$$

Fórmulas para $1/\pi^2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 2^{10n}}.$$

$$\cdot(1640n^2 + 278n + 15) = \frac{256\sqrt{3}}{3\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^5 48^n}.$$

$$\cdot(252n^2 + 63n + 5) = \frac{48}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 80^{3n}}.$$

$$\cdot(5418n^2 + 693n + 29) = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{8}\right)_n \left(\frac{3}{8}\right)_n \left(\frac{5}{8}\right)_n \left(\frac{7}{8}\right)_n}{n!^5 7^{4n}}.$$

$$\cdot (1920n^2 + 304n + 15) = \frac{56\sqrt{7}}{\pi^2}.$$

Examinamos ahora las siguientes fórmulas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3 48^n} (28n + 3) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3 80^{3n}} (5418n+263) = \frac{640\sqrt{15}}{3\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3 7^{4n}} (40n + 3) = \frac{49\sqrt{3}}{9\pi}.$$

Vamos a explicar el origen del número 80^3. El invariante absoluto de Klein es:

$$J(q) = \frac{4}{27} \frac{[1-\lambda(q)+\lambda^2(q)]^3}{\lambda^2(q)[1-\lambda(q)]^2},$$

siendo:

$$\lambda(q) = \left[\frac{\vartheta_2(q)}{\vartheta_3(q)}\right]^4.$$

Para $d = 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$ and 163.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(12)^{3n} \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3 J^n \left(\frac{1+\sqrt{-d}}{2}\right)} (an+b) = \frac{c\sqrt{k}}{\pi}.$$

Para $d = 43$ tenemos $J\left(\frac{1+\sqrt{-43}}{2}\right) = -960^3$.

CONJETURA 1: Estas fórmulas para $1/\pi^2$ se pueden demostrar a partir de la teoría de formas y funciones modulares.

Series de tipo Ramanujan para $1/\pi^3$.
Boris Gourevitch (Relaciones enteras):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^7}{1_n^7} (168n^3 + 76n^2 + 14n + 1) = \frac{32}{\pi^3}$$

y con la traslación $n \to n + 1/2$ con MAPLE 9 algoritmo (PSLQ):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \cdot \frac{1_n^7}{\left(\frac{1}{2}\right)_n^7 (2n+1)^7} \cdot (21n^3 + 41n^2 + 27n + 16) =$$

$$= \frac{\pi^4}{16}$$

Estas fórmulas están sin demostrar.

Sabemos que las series de Ramanujan se pueden demostrar a partir de la teoría de las formas y funciones modulares de peso 2, es decir funciones que verifican:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 f(z)$$

siendo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

Estas matrices forman lo que se llama el grupo modular. Está generado por las matrices:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como T pertenece al grupo modular tenemos que $f(z+1) = f(z)$ y por lo tanto $f(z)$ admite un desarrollo de Fourier:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a(n) q^n, \qquad (q = e^{i\pi z})$$

Por ejemplo, el invariante absoluto de Klein admite el desarrollo:

$$j(z) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

Otras funciones muy importantes relacionadas con las series de Ramanujan son las series de Eisenstein de peso k:

$$G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \sum_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

con $(m, n) \neq (0, 0)$

$$G_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

en donde

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

Desarrollos en serie de Fourier son:

$$G_4 = \frac{-1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + 252q^6 + \cdots$$

$$G_6 = \frac{-1}{504} + q + 933q^2 + 244q^3 + 1057q^4 + 3126q^5 + \cdots$$

Chan Heng Huat: Las nuevas series para $1/\pi^2$ se podrán demostrar encontrando las funciones modulares adecuadas que ahora serán de peso 4, es decir:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^4 f(z)$$

CONJETURA 2:
Las fórmulas de tipo Ramanujan para $1/\pi$ y $1/\pi^2$ se pueden demostrar con las estrategias del método WZ.

- ENCAPSULADA EN $F(n,k)$.

- TRIVIAL.

- DEMOSTRACIÓN ¿FEA?.

- DEMOSTRACIÓN ¿LIMITADA?.

Doron Zeilberger:
El álgebra computarizada no es el demonio sino el nuevo mesías de las matemáticas.
MATEMÁTICAS=COMPUTACIÓN SIMBÓLICA