EL NÚMERO PI

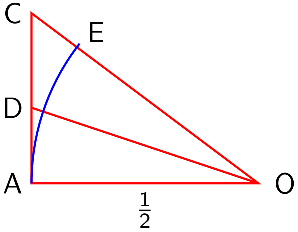
Jesús Guillera

Actualización en Matemáticas
Universidad de La Rioja

16 de Marzo de 2016

Arquímedes: La medida del círculo (250 a. C.)

π es el perímetro de un círculo de radio $= \frac{1}{2}$.

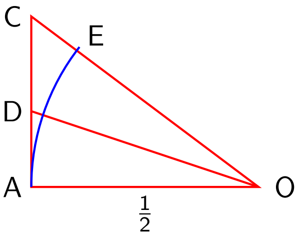


$$\frac{CA - DA}{DA} = \frac{OC}{OA} \quad \text{(Euclides)}$$

$$OA^2 = OC^2 - CA^2 \quad \text{(Pitágoras)}$$

Arquímedes: La medida del círculo (250 a. C.)

π es el perímetro de un círculo de radio $= \frac{1}{2}$.



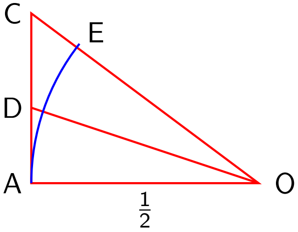
$$\frac{CA - DA}{DA} = \frac{OC}{OA} \quad \text{(Euclides)}$$

$$OA^2 = OC^2 - CA^2 \quad \text{(Pitágoras)}$$

Lado del hexágono circunscrito $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (Pitágoras).

Arquímedes: La medida del círculo (250 a. C.)

π es el perímetro de un círculo de radio $= \frac{1}{2}$.



$$\frac{CA - DA}{DA} = \frac{OC}{OA} \quad \text{(Euclides)}$$

$$OA^2 = OC^2 - CA^2 \quad \text{(Pitágoras)}$$

Lado del hexágono circunscrito $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (Pitágoras).

Número de lados: $6 \to 12 \to 24 \to 48 \to 96 \longrightarrow \left(\pi \approx 3 + \dfrac{1}{7}\right).$

Algoritmo de Arquímedes (notación moderna)

L_n lado de un polígono regular circunscrito de n lados.

$$L_{2n} = \frac{\sqrt{1 + L_n^2} - 1}{L_n}, \qquad P_n = n\, L_n \to \pi.$$

Algoritmo de Arquímedes (notación moderna)

L_n lado de un polígono regular circunscrito de n lados.

$$L_{2n} = \frac{\sqrt{1 + L_n^2} - 1}{L_n}, \qquad P_n = n\, L_n \to \pi.$$

ℓ_n lado de un polígono regular inscrito de n lados.

$$\ell_{2n} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \ell_n^2}}{2}}, \qquad p_n = n\, \ell_n \to \pi.$$

Redescubierta por Aryabhata, matemático y astrónomo hindú del siglo VI.

Marcos Chicot (El asesinato de Pitágoras) explica muy bien en un video una demostración de esta fórmula.

Un algoritmo equivalente

Los lados L_n y ℓ_n guardan la siguiente relación $L_n = \ell_n / \sqrt{1 - \ell_n^2}$, que permitió demostrar que el siguiente algoritmo:

$$P_{2n} = \frac{2 P_n \, p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n} \, p_n}, \qquad P_n \to \pi, \quad p_n \to \pi.$$

es equivalente al de Arquímedes.

Un algoritmo equivalente

Los lados L_n y ℓ_n guardan la siguiente relación $L_n = \ell_n / \sqrt{1 - \ell_n^2}$, que permitió demostrar que el siguiente algoritmo:

$$P_{2n} = \frac{2 P_n \, p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n} \, p_n}, \qquad P_n \to \pi, \quad p_n \to \pi.$$

es equivalente al de Arquímedes.

Ludolph Van Ceulen (1540-1610):

$$\text{Número de lados} \quad 2^2 \to 2^3 \to 2^4 \to 2^5 \to \cdots \to 2^{62} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

Un algoritmo equivalente

Los lados L_n y ℓ_n guardan la siguiente relación $L_n = \ell_n / \sqrt{1-\ell_n^2}$, que permitió demostrar que el siguiente algoritmo:

$$P_{2n} = \frac{2P_n\, p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n}\, p_n}, \qquad P_n \to \pi, \quad p_n \to \pi.$$

es equivalente al de Arquímedes.

Ludolph Van Ceulen (1540-1610):

$$\text{Número de lados} \quad 2^2 \to 2^3 \to 2^4 \to 2^5 \to \cdots \to 2^{62} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

inscrito en la lápida de su tumba = Número de Ludolph.

Un algoritmo equivalente

Los lados L_n y ℓ_n guardan la siguiente relación $L_n = \ell_n / \sqrt{1-\ell_n^2}$, que permitió demostrar que el siguiente algoritmo:

$$P_{2n} = \frac{2P_n\, p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n}\, p_n}, \qquad P_n \to \pi, \quad p_n \to \pi.$$

es equivalente al de Arquímedes.

Ludolph Van Ceulen (1540-1610):

$$\text{Número de lados} \quad 2^2 \to 2^3 \to 2^4 \to 2^5 \to \cdots \to 2^{62} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

inscrito en la lápida de su tumba = Número de Ludolph.

La fórmula del coseno del ángulo doble se debe a Van Ceulen.

Productos infinitos

Fórmula de Viète (1579) y Producto de Wallis (1665):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdots, \quad \frac{2}{\pi} = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right)\left(\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6}\right) \cdots .$$

Productos infinitos

Fórmula de Viète (1579) y Producto de Wallis (1665):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdots, \quad \frac{2}{\pi} = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right)\left(\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6}\right)\cdots.$$

Osler (1999) $>$ Viète $+$ Wallis:

$$\frac{2}{V_n\,\pi} = \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 4^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{9 \cdot 4^{n+1}}\right)\cdots,$$

donde V_n denota los n primeros factores del producto de Viète.

$n \to \infty$ (Fórmula de Viète), $n = 0$ (Fórmula de Wallis).

Productos infinitos

Fórmula de Viète (1579) y Producto de Wallis (1665):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdots , \quad \frac{2}{\pi} = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right)\left(\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6}\right) \cdots .$$

Osler (1999) $>$ Viète $+$ Wallis:

$$\frac{2}{V_n\, \pi} = \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 4^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{9 \cdot 4^{n+1}}\right) \cdots ,$$

donde V_n denota los n primeros factores del producto de Viète.

$n \to \infty$ (Fórmula de Viète), $n = 0$ (Fórmula de Wallis).

La demostración se basa en:

- Fórmulas trigonométricas de los ángulos doble y mitad.
- Desarrollo de $\sin(x)/x$ en producto infinito (Euler, 1737).

Fracciones continuas

Osler (2011) $>$ Brouncker (1665) $+$ Wallis (1665):

$$\frac{4(2n+1)}{W_n\,\pi} = 4n+1+\cfrac{1^2}{2(4n+1)+\cfrac{3^2}{2(4n+1)+\ddots}},$$

donde W_n denota los n primeros factores del producto de Wallis.

Fracciones continuas

Osler (2011) > Brouncker (1665) + Wallis (1665):

$$\frac{4(2n+1)}{W_n\,\pi} = 4n+1+\cfrac{1^2}{2(4n+1)+\cfrac{3^2}{2(4n+1)+\ddots}},$$

donde W_n denota los n primeros factores del producto de Wallis.

- $n=0$ (Fórmula de Brounker)
- Dividiendo entre n y haciendo $n\to\infty$ (Producto de Wallis).

Fracciones continuas

Osler (2011) $>$ Brouncker (1665) $+$ Wallis (1665):

$$\frac{4(2n+1)}{W_n\,\pi} = 4n+1+\cfrac{1^2}{2(4n+1)+\cfrac{3^2}{2(4n+1)+\ddots}},$$

donde W_n denota los n primeros factores del producto de Wallis.

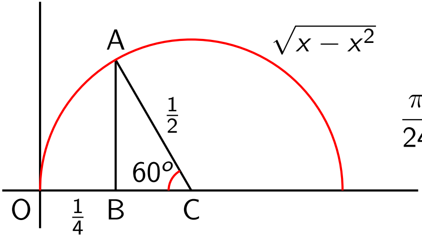
- $n = 0$ (Fórmula de Brounker)
- Dividiendo entre n y haciendo $n \to \infty$ (Producto de Wallis).

Fracción continua ordinaria:

$$\pi = [3, 7, 15, 192, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \cdots]$$
$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, \cdots]$$

Fórmula de Newton para π

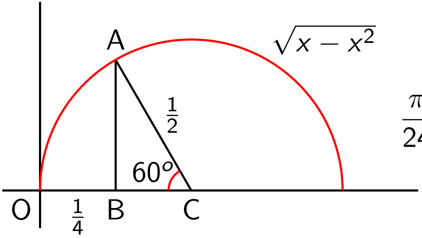
Hallando el área OAC Newton obtiene en 1665 la fórmula de abajo



$$\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{32} + \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

Fórmula de Newton para π

Hallando el área OAC Newton obtiene en 1665 la fórmula de abajo



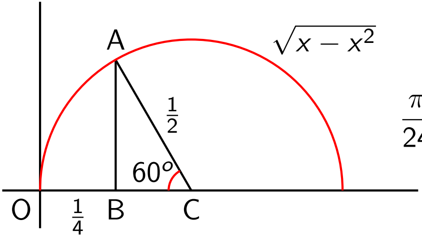
$$\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{32} + \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)(2n+5)16^n}$$

y con ella calcula 15 dígitos del número π: 3,141592653589793.

Fórmula de Newton para π

Hallando el área OAC Newton obtiene en 1665 la fórmula de abajo



$$\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{32} + \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)(2n+5)16^n}$$

y con ella calcula 15 dígitos del número π: 3,141592653589793.

I am ashamed to tell you to how many figures I carried these computations, having no other business at the time (Isaac Newton, 1666).

Formula de Gregory

En 1671 Gregory integrando término a término la serie geométrica $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = (1 + x^2)^{-1}, \quad |x| < 1$, demuestra la fórmula

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| \leq 1,$$

Pero Gregory no la utilizó para deducir fórmulas para el número π.

Formula de Gregory

En 1671 Gregory integrando término a término la serie geométrica $1-x^2+x^4-x^6+\cdots=(1+x^2)^{-1}, \quad |x|<1$, demuestra la fórmula

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots , \quad |x| \le 1,$$

Pero Gregory no la utilizó para deducir fórmulas para el número π.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}, \qquad \text{(Leibniz, 1674).}$$

$$\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right), \qquad \text{(Sharp, 1699).}$$

con la que calculó 71 dígitos de π (record).

Formula de Gregory

En 1671 Gregory integrando término a término la serie geométrica $1-x^2+x^4-x^6+\cdots=(1+x^2)^{-1}, \quad |x|<1$, demuestra la fórmula

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| \le 1,$$

Pero Gregory no la utilizó para deducir fórmulas para el número π.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{(Leibniz, 1674).}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right), \qquad \text{(Sharp, 1699).}$$

con la que calculó 71 dígitos de π (record).

Estas dos fórmulas ya se conocían en la India muchos años antes (Mādhaba de Sangamagrama, 1350-1425).

Fórmula de Machin

En 1706 John Machin demostró la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

y con ella calculó 100 decimales de π.

Fórmula de Machin

En 1706 John Machin demostró la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

y con ella calculó 100 decimales de π.

Gauss (1777-1855) demostró la fórmula de tipo Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}.$$

Fórmula de Machin

En 1706 John Machin demostró la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

y con ella calculó 100 decimales de π.

Gauss (1777-1855) demostró la fórmula de tipo Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}.$$

Una vez conocidas son fáciles de verificar:

Fórmula de Machin

En 1706 John Machin demostró la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

y con ella calculó 100 decimales de π.

Gauss (1777-1855) demostró la fórmula de tipo Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}.$$

Una vez conocidas son fáciles de verificar:

$$(5+i)^4 = 2(1+i)(239+i),$$
$$(18+i)^{12}(57+i)^8 = 2 \cdot 5^{24}(239+i)^5(1+i),$$

sólo hay que igualar argumentos.

El problema de Basilea

En 1650 Pietro Mengoli propone calcular la suma:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = S.$$

El problema de Basilea

En 1650 Pietro Mengoli propone calcular la suma:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = S.$$

Wallis, Leibniz y los hermanos Bernoulli lo intentaron sin éxito. En 1731 Euler demuestra la identidad

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \cdot 2^n} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \right)^2 \simeq 1{,}644934.$$

El problema de Basilea

En 1650 Pietro Mengoli propone calcular la suma:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = S.$$

Wallis, Leibniz y los hermanos Bernoulli lo intentaron sin éxito. En 1731 Euler demuestra la identidad

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \cdot 2^n} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \right)^2 \simeq 1{,}644934.$$

En 1735 Euler, igualando los coeficientes de x^2 en

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

demuestra que $S = \pi^2/6$.

El factorial de n y el número π

L. Euler demuestra por inducción

$$n! = \left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3} \cdots ,$$

El factorial de n y el número π

L. Euler demuestra por inducción

$$n! = \left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3} \cdots ,$$

lo que le permite hallar:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5} \cdots ,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{5} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{6}{7} \cdots ,$$

El factorial de n y el número π

L. Euler demuestra por inducción

$$n! = \left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3} \cdots,$$

lo que le permite hallar:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5} \cdots,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{5} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{6}{7} \cdots,$$

multiplicando y usando la fórmula de Wallis, obtiene $2(1/2)! = \sqrt{\pi}$.

El factorial de n y el número π

L. Euler demuestra por inducción

$$n! = \left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3} \cdots ,$$

lo que le permite hallar:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5} \cdots ,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{5} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{6}{7} \cdots ,$$

multiplicando y usando la fórmula de Wallis, obtiene $2(1/2)! = \sqrt{\pi}$.

De Moivre y Stirling demuestran la fórmula $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

La longitud de la lemniscata

La lemniscata es el conjunto de puntos del plano cuyo producto de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

La longitud de la lemniscata

La lemniscata es el conjunto de puntos del plano cuyo producto de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

En 1748 Euler consigue evaluar con factoriales las integrales:

$$\frac{\hat{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\frac{(\frac{1}{4})!(\frac{1}{2})!}{(\frac{-1}{4})!}, \quad \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{-1}{4})!(\frac{1}{2})!}{(\frac{1}{4})!}$$

($\hat{\omega}$ = longitud de un bucle de lemniscata unidad).

La longitud de la lemniscata

La lemniscata es el conjunto de puntos del plano cuyo producto de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

En 1748 Euler consigue evaluar con factoriales las integrales:

$$\frac{\hat{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\frac{(\frac{1}{4})!(\frac{1}{2})!}{(\frac{-1}{4})!}, \quad \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{-1}{4})!(\frac{1}{2})!}{(\frac{1}{4})!}$$

($\hat{\omega} =$ longitud de un bucle de lemniscata unidad). Multiplicando:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

El número π es irracional (y transcendente)

Lo demuestra Lambert en 1761.

El número π es irracional (y transcendente)

Lo demuestra Lambert en 1761.

Demostración de Niven (Amer. Math. Monthly, 1946):

Sea $\pi = a/b$ un cociente de enteros positivos. Definimos

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad g_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx.$$

$$g_2 = -2a^2 + 24b^2 + (\pi/2)(a\pi - b\pi^2 + 12b)(a - b\pi) = -2a^2 + 24b^2.$$

$$g_n = 2 \sum_{j=n}^{2n} \left(\cos \frac{\pi j}{2} \right) \frac{j!}{n!} \binom{n}{j-n} a^{2n-j} (-b)^{j-n} \in \mathbb{Z},$$

$n \geq 80\, a^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < g_n < 1$ CONTRADICCIÓN!.

El número π es irracional (y transcendente)

Lo demuestra Lambert en 1761.

Demostración de Niven (Amer. Math. Monthly, 1946):

Sea $\pi = a/b$ un cociente de enteros positivos. Definimos

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad g_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx.$$

$$g_2 = -2a^2 + 24b^2 + (\pi/2)(a\pi - b\pi^2 + 12b)(a - b\pi) = -2a^2 + 24b^2.$$

$$g_n = 2\sum_{j=n}^{2n} \left(\cos\frac{\pi j}{2}\right) \frac{j!}{n!} \binom{n}{j-n} a^{2n-j}(-b)^{j-n} \in \mathbb{Z},$$

$$n \geq 80\, a^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < g_n < 1 \quad \text{CONTRADICCIÓN!}.$$

π es transcendente (1882): Lindemann a partir de $e^{i\pi} = -1$ (Euler).

Pi y la media aritmético-geométrica

En 1791 Gauss (14 años) define $M(a_0, b_0) = \lim a_n = \lim b_n$, siendo $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Pi y la media aritmético-geométrica

En 1791 Gauss (14 años) define $M(a_0, b_0) = \lim a_n = \lim b_n$, siendo $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Con 22 años observa que $\pi/\hat{\omega} \approx 1{,}19814023473 \approx M(\sqrt{2}, 1)$:
If this is proven, then a truly new field of analysis stands before us.

Pi y la media aritmético-geométrica

En 1791 Gauss (14 años) define $M(a_0, b_0) = \text{lím}\, a_n = \text{lím}\, b_n$, siendo $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Con 22 años observa que $\pi/\hat{\omega} \approx 1{,}19814023473 \approx M(\sqrt{2}, 1)$:
If this is proven, then a truly new field of analysis stands before us.

En el año 1800 el mismo lo demuestra y además deduce la fórmula:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (a_k^2 - b_k^2) = 2 - \frac{2M^2}{\pi},$$

con $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 1$ y $M = M(\sqrt{2}, 1)$.

Pi y la media aritmético-geométrica

En 1791 Gauss (14 años) define $M(a_0, b_0) = \lim a_n = \lim b_n$, siendo $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Con 22 años observa que $\pi/\hat{\omega} \approx 1{,}19814023473 \approx M(\sqrt{2}, 1)$:
If this is proven, then a truly new field of analysis stands before us.

En el año 1800 el mismo lo demuestra y además deduce la fórmula:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (a_k^2 - b_k^2) = 2 - \frac{2M^2}{\pi},$$

con $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 1$ y $M = M(\sqrt{2}, 1)$.

- Gauss no la utilizó para calcular π y la fórmula se olvidó.
- Fue redescubierta en 1970 por E. Salamin y R. Brent.

Series de Ramanujan para $1/\pi$

En 1914 el genio matemático indio Srinivasa Ramanujan dió 17 fórmulas rápidas para $1/\pi$, como por ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n}} = \frac{16}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n)!^4} \frac{26390n+1103}{396^{4n}} = \frac{9801\sqrt{2}}{4\pi}, \quad \text{8 dígitos/término.}$$

El número π aparece en las fórmulas de Ramanujan debido a propiedades de las integrales elípticas.

Series de Ramanujan para $1/\pi$

En 1914 el genio matemático indio Srinivasa Ramanujan dió 17 fórmulas rápidas para $1/\pi$, como por ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n}} = \frac{16}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n)!^4} \frac{26390n+1103}{396^{4n}} = \frac{9801\sqrt{2}}{4\pi}, \qquad \text{8 dígitos/término.}$$

El número π aparece en las fórmulas de Ramanujan debido a propiedades de las integrales elípticas.

- Gosper en 1985 calculó 17 526 200 decimales de π (récord).
- J. y P. Borwein las demuestran en 1987.
- B. Berndt (Ramanujan notebooks).

Series de tipo Ramanujan para $1/\pi$

Chan, Liaw y Tan demostraron en 2002 (5 dígitos por término):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n)!(2n)!}{(n!)^5} \frac{14151n+827}{300^{3n}} = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi}.$$

Series de tipo Ramanujan para $1/\pi$

Chan, Liaw y Tan demostraron en 2002 (5 dígitos por término):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n)!(2n)!}{(n!)^5} \frac{14151n + 827}{300^{3n}} = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi}.$$

D. y G. Chudnovsky (Ukrania) demostraron en 1987 la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3} \frac{545140134n + 13591409}{640320^{3n}} = \frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi}$$

(14 dígitos por término) y calcularon 8 000 000 000 (record 1996).

Chan, Liaw y Tan demostraron en 2002 (5 dígitos por término):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n)!(2n)!}{(n!)^5}\frac{14151n+827}{300^{3n}} = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi}.$$

D. y G. Chudnovsky (Ukrania) demostraron en 1987 la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3}\frac{545140134n+13591409}{640320^{3n}} = \frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi}$$

(14 dígitos por término) y calcularon 8 000 000 000 (record 1996).

$$e^{\pi\sqrt{163}} - 744 + 196884 e^{-\pi\sqrt{163}} - 21493760 e^{-2\pi\sqrt{163}} + \cdots = 640320^3.$$

El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ es de factorización única para

$$d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}.$$

El algoritmo cuártico de los hermanos Borwein

En 1985 los hermanos Jonathan y Peter Borwein demostraron que si $s_0 = 1/\sqrt[4]{2}$, $t_0 = 1/2$, $s_{n+1} = (1 - \sqrt[4]{1 - s_n^4})/(1 + \sqrt[4]{1 - s_n^4})$ y $t_{n+1} = (1+s_{n+1})^4 t_n - 2^{2n+2} s_{n+1}(1+s_{n+1}+s_{n+1}^2)$, se tiene $t_n \to 1/\pi$.

El algoritmo cuártico de los hermanos Borwein

En 1985 los hermanos Jonathan y Peter Borwein demostraron que si $s_0 = 1/\sqrt[4]{2}$, $t_0 = 1/2$, $s_{n+1} = (1-\sqrt[4]{1-s_n^4})/(1+\sqrt[4]{1-s_n^4})$ y $t_{n+1} = (1+s_{n+1})^4 t_n - 2^{2n+2} s_{n+1}(1+s_{n+1}+s_{n+1}^2)$, se tiene $t_n \to 1/\pi$.

1-) Demostración de los Borwein: Funciones modulares elípticas.

2-) En 2008 lo demostré de una forma sencilla (bonita y autocontenida en palabras de J. Borwein): Iteraciones de la MAG y Fórmula de Gauss.

El algoritmo cuártico de los hermanos Borwein

En 1985 los hermanos Jonathan y Peter Borwein demostraron que si $s_0 = 1/\sqrt[4]{2}$, $t_0 = 1/2$, $s_{n+1} = (1 - \sqrt[4]{1 - s_n^4})/(1 + \sqrt[4]{1 - s_n^4})$ y $t_{n+1} = (1+s_{n+1})^4 t_n - 2^{2n+2} s_{n+1}(1+s_{n+1}+s_{n+1}^2)$, se tiene $t_n \to 1/\pi$.

1-) Demostración de los Borwein: Funciones modulares elípticas.

2-) En 2008 lo demostré de una forma sencilla (bonita y autocontenida en palabras de J. Borwein): Iteraciones de la MAG y Fórmula de Gauss.

- Dígitos correctos $8 \to 32 \to 128 \to 512 \to \cdots$.
- En 1999 Kanada y Takahashi obtuvieron con este algoritmo un récord de 206 158 430 000 decimales de π (18 iteraciones).

Nuevas fórmulas

A partir del año 2002 demostré algunas fórmulas nuevas con el algoritmo WZ (Wilf-Zeilberger). Por ejemplo, en 2003 demostré

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{8n}2^{4k}} \frac{\binom{2n}{n}^3 \binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{n}^2}(6n+4k+1) = \lim_{k \to \infty} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}}(4k+1) = \frac{4}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{12n}2^{8k}} \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2k}{k}^4}{\binom{n+k}{n}^4}(20n^2+8n+1+24kn+8k^2+4k) = \frac{8}{\pi^2}.$$

Nuevas fórmulas

A partir del año 2002 demostré algunas fórmulas nuevas con el algoritmo WZ (Wilf-Zeilberger). Por ejemplo, en 2003 demostré

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{8n}2^{4k}} \frac{\binom{2n}{n}^3 \binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{n}^2}(6n+4k+1) = \lim_{k \to \infty} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}}(4k+1) = \frac{4}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{12n}2^{8k}} \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2k}{k}^4}{\binom{n+k}{n}^4}(20n^2+8n+1+24kn+8k^2+4k) = \frac{8}{\pi^2}.$$

Para $k = 0$ tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{6n+1}{2^{8n}} = \frac{4}{\pi}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^5 (20n^2+8n+1)\frac{(-1)^n}{2^{12n}} = \frac{8}{\pi^2},$$

la primera demostrada por Ramanujan en 1914.

Mirror symmetry?

Algunas fórmulas conjeturadas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{5418n^2+693n+29}{2880^{3n}} = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}, \quad \text{G. (2003), (2006).}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{532n^2+126n+9}{10^{6n}} = \frac{375}{4\pi^2}, \quad \text{Almkvist y G. (2010).}$$

$$\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n \binom{2n}{n}^5 \frac{20n^2+8n+1}{2^{12n}} \equiv p^2 \pmod{p^5}, \quad \text{Zudilin (2008),}$$

for primes $p > 3$.

Mirror symmetry?

Algunas fórmulas conjeturadas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(6n)!}{(n!)^6}\frac{5418n^2+693n+29}{2880^{3n}}=\frac{128\sqrt{5}}{\pi^2},$$ G. (2003), (2006).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n)!}{(n!)^6}\frac{532n^2+126n+9}{10^{6n}}=\frac{375}{4\pi^2},$$ Almkvist y G. (2010).

$$\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n\binom{2n}{n}^5\frac{20n^2+8n+1}{2^{12n}}\equiv p^2 \pmod{p^5},$$ Zudilin (2008),

for primes $p>3$. Zudilin fue el primero en observar una relación entre estos tipos de fórmulas y la teoría de Calabi-Yau, y comenta:

For the moment, there are only speculations about their possible relationship to mirror symmetry.

En 1995 Peter Borwein y Simon Plouffe observaron que con la serie

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

se podía deducir una fórmula para el cálculo rápido en binario de $\{2^k \ln 2\} = \{10^k \ln 10\}$ = bits a partir de la posición $k+1$.

En 1995 Peter Borwein y Simon Plouffe observaron que con la serie

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

se podía deducir una fórmula para el cálculo rápido en binario de $\{2^k \ln 2\} = \{10^k \ln 10\} =$ bits a partir de la posición $k+1$. Unos meses después D. Bailey, P. Borwein y S. Plouffe descubren la fórmula BBP:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right),$$

que se puede adaptar al calculo rápido de $\{16^k \pi\} = \{10^k \pi\} =$ cifras hexadecimales a partir de la posición $k+1$.

Fórmulas BBP y cálculo de dígitos aislados

En 1995 Peter Borwein y Simon Plouffe observaron que con la serie

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

se podía deducir una fórmula para el cálculo rápido en binario de $\{2^k \ln 2\} = \{10^k \ln 10\} =$ bits a partir de la posición $k+1$. Unos meses después D. Bailey, P. Borwein y S. Plouffe descubren la fórmula BBP:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right),$$

que se puede adaptar al calculo rápido de $\{16^k \pi\} = \{10^k \pi\} =$ cifras hexadecimales a partir de la posición $k+1$.

¿Es π un número normal?

GRACIAS