UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Series de Ramanujan: Generalizaciones y conjeturas

Memoria presentada por D. Jesús Guillera Goyanes para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Fdo. Jesús Guillera Goyanes

Vº Bº del Director

Vº Bº del Director

Fdo. Dña Eva A. Gallardo Gutiérrez
Profesora Titular del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Zaragoza.

Fdo. D. Wadim Zudilin
Associate Professor at the Department of
Mechanics and Mathematics
Moscow Lomonosov State University.

Zaragoza, Abril 2007.

Índice general

Introducción

Uno de los resultados más notables y espectaculares en la historia de las fórmulas para el número π son las series de convergencia rápida obtenidas por S. Ramanujan en 1914 [22]. Dichas series son del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n z^n B_n (a+bn) = \frac{1}{\pi},$$

donde $u = 1$ (series de términos positivos) ó $u = -1$ (series alternadas) y z, b y a son números algebraicos positivos con $0 < z < 1$, $a > 0$ y $b > 0$. Ramanujan obtuvo 4 familias, correspondientes a las siguientes posibilidades de B_n:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3}.$$

Aquí $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ denota el factorial ascendente o símbolo de Pochhammer. La velocidad de convergencia de estas series se corresponde esencialmente con la de la serie correspondiente a su parte geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y por lo tanto el número de cifras decimales de π que se obtienen con cada sumando es aproximadamente $-\log z$ (log denota aquí el logaritmo decimal). Hay varias razones para considerar importantes las series de Ramanujan, una es que entre ellas se encuentran algunas de las series más rápidas para el cálculo de los decimales de π. Otra razón es que las demostraciones basadas en la teoría de las funciones modulares elípticas de Jacobi, la cual tiene su origen en el estudio de las integrales elípticas de primera y segunda especies

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}}\, dt, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

han contribuido al progreso de dicha teoría. Así, a partir del estudio realizado por Ramanujan de las funciones modulares elípticas, en [22] consigue demostrar, aunque de forma parcial, fórmulas para las series de la primera familia especificando 3 ejemplos, entre los cuales señalamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3} \frac{1}{2^{6n}} (42n+5) = \frac{16}{\pi}.$$

En el mencionado trabajo, Ramanujan afirma que existen teorías alternativas, de las cuales no proporciona casi detalles, con las que se pueden obtener series pertenecientes a las otras tres familias y aporta 14 ejemplos más [22]. Entre ellos destacamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^3} \left(\frac{2}{27}\right)^n (15n+2) = \frac{27}{4\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3} \left(\frac{4}{125}\right)^n (11n+1) = \frac{5\sqrt{15}}{6\pi}$$

y por supuesto los dos más impresionantes en lo que a velocidad de convergencia se refiere (demostrados rigurosamente [7] por los hermanos Borwein en 1985):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} \frac{(-1)^n}{882^{2n}} (21460n+1123) = \frac{3528}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} \frac{1}{99^{4n}} (26390n+1103) = \frac{9801\sqrt{2}}{4\pi}.$$

La última serie proporciona aproximadamente $4\log 99 \simeq 8$ cifras decimales de π por término. Las identidades propuestas por Ramanujan en lo referente a las familias antes mencionadas han sido objeto de intenso estudio en los últimos veinte años. Así en 1987, los hermanos Chudnovsky descubren y demuestran [12] la serie para $1/\pi$ de convergencia más rápida posible de entre las que se caracterizan por ser z un número racional y que aporta nada menos que 15 decimales de π por término:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3} \frac{(-1)^n}{53360^{3n}} (545140134n+13591409) = \frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi}.$$

Recientemente, H. H. Chan, W. C. Liaw y V. Tan han desarrollado una teoría para algunos tipos de series de la tercera familia que permanecían aún sin demostración [9]. Entre dichas series destacamos la siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^3} \frac{(-1)^n}{500^{2n}} (14151n+827) = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi}.$$

Señalar que se conocen muchos ejemplos de series de tipo Ramanujan con valores de z algebraicos pero no racionales. Como muestra damos dos de ellos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} (97-56\sqrt{3})^n \left(\sqrt{78\sqrt{3}-135} + 6\sqrt{14\sqrt{3}-24} \cdot n\right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{13\sqrt{7}-34}{54}\right)^n \left(\frac{7\sqrt{7}-10}{27} + \frac{13\sqrt{7}-7}{9} n\right) = \frac{1}{\pi}.$$

Las demostraciones de las series de tipo Ramanujan para $1/\pi$ dadas en los trabajos anteriormente mencionados se basan, esencialmente, en hallar ciertas funciones $z(q)$, $b(q)$ y $a(q)$, relacionadas con las funciones modulares elípticas, tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left\{a(q) + b(q)n\right\} z(q)^n = \frac{1}{\pi}, \qquad q = e^{-\pi\sqrt{N}},$$

y evaluarlas para algunos valores racionales de N. Desarrollos que siguen este método pueden encontrarse en [7], [6] y [12].

Una variante novedosa es la aportada por T. Sato [23], quien en una conferencia en Japón en 2002 presenta la siguiente serie para $1/\pi$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{12n} (20n + 10 - 3\sqrt{5}) = \frac{20\sqrt{3} + 9\sqrt{15}}{6\pi},$$

donde B_n son los números de Apéry, definidos mediante

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

Esta serie se diferencia de las anteriores en que la sucesión de numeros B_n no está entre las consideradas por Ramanujan y por consiguiente pertenece a una nueva familia. Poco después se han encontrado nuevas familias correspondientes a otros tipos de números, por ejemplo a los números de Domb. Además y de forma independiente H. H. Chan y Y. Yang desarrollan en [10] y [25] una teoría nueva basada también en la teoría de las funciones modulares elípticas que permite explicar cualquier serie de tipo Ramanujan-Sato y por lo tanto, como caso particular, las de tipo Ramanujan.

Un método alternativo y radicalmente diferente para generar algunas series de Ramanujan que evita la teoría de las funciones modulares elípticas fue desarrollado en 1990 por H. Wilf y D. Zeilberger y es conocido como **el método WZ** [21], [26]. Cabe resaltar que el mérito por haber desarrollado dicho método fue reconocido otorgándoles en 1998 el prestigioso premio Steele. El método WZ, que es puramente hipergeométrico, permite entre otras cosas demostrar cualquier identidad de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \text{Constante},$$

siempre que la función $G(n,k)$ sea hipergeométrica en sus dos variables, es decir si los cocientes

$$\frac{G(n,k+1)}{G(n,k)} \quad \text{y} \quad \frac{G(n+1,k)}{G(n,k)},$$

son funciones racionales.

El propio Zeilberger demuestra en 1993 la más sencilla de las fórmulas de Ramanujan [13]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(4n+1) = \frac{2}{\pi}$$

encontrando una fórmula más general, que incluye la variable libre k, adecuada para la aplicación del método WZ.

En esta tesis presentamos nuevos resultados relacionados con las series para π de tipo Ramanujan y de tipo Ramanujan-Sato. Se trata de una tesis que unifica en cuatro capítulos los seis artículos que el autor ha dedicado a la investigación de dichos tipos de series [15], [16], [17], [18], [19] y [20]. Así, el capítulo 1, se basa en los artículos *Some binomial series obtained by the WZ-method* [15], *Generators of Some Ramanujan Formulas* [16] y *About a new kind of Ramanujan type series* [17], aunque también utiliza algunos pares WZ del artículo *Hypergeometric identities for* 10 *extended Ramanujan type series* [18]. El capítulo 2 se basa en la publicación *Hypergeometric identities for* 10 *extended Ramanujan type series* [18] y los capítulos 3 y 4 se corresponden, respectivamente y casi exactamente con los artículos *A new method to obtain series for* $1/\pi$ *and* $1/\pi^2$ [19] y *A class of conjectured series representations for* $1/\pi$ [20].

En los dos primeros capítulos hacemos uso del método WZ creado por Wilf y Zeilberger y de las ideas aportadas por Zeilberger en [13] y Amdeberhan y Zeilberger en [2]. Los capítulos 3 y 4 utilizan algunas ideas obtenidas de resultados de los capítulos previos y también otras provenientes de la teoría de las funciones modulares.

A continuación damos un resumen del contenido de la tesis resaltando los principales resultados de cada capítulo que consisten en series generalizadas auto-demostrables que en un caso particular son de tipo Ramanujan, una nueva clase de series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$, nuevas clases de identidades hipergeométricas y algunas conjeturas de gran generalidad.

En el **capítulo 1** obtenemos algunas series de Ramanujan a partir de generalizaciones de ellas para las que existe un algoritmo de demostración. A continuación damos algunos ejemplos. Para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(6n+1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

encontramos las siguientes generalizaciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+2k\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(1+k)_n^2 (1)_n} (6n+4k+1) \frac{\binom{3k}{k}\binom{4k}{k}}{2^{6k}} = \frac{2}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1)_n^2 (1+k)_n} (6n+2k+1) \frac{\binom{2k}{k}}{2^{3k}} = \frac{2}{\pi}.$$

Para la serie de Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3} (42n+5) = \frac{16}{\pi},$$

encontramos las siguientes generalizaciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{\left(1+\frac{k}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^2 (1)_n} R(n,k) \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} = \frac{16}{\pi},$$

siendo

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)^2(42n+4k+5) - 32kn(4n+3k+2)}{(2n+k+1)^2}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2}{(1)_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} R(n,k) \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{16}{\pi},$$

siendo

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)(42n+2k+5) - 32kn}{2n+k+1}.$$

Como último ejemplo, para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}3^n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} (28n+3) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}.$$

encontramos la serie generalizada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}3^n} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1)_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} R(n,k) \frac{3^k \binom{2k}{k}}{2^{4k}} = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi},$$

siendo

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)(28n+2k+3) - 24kn}{2n+k+1}.$$

En cuanto a las series nuevas para $1/\pi^2$, similares a las de Ramanujan para $1/\pi$, demostramos las siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{2^{2n}} (20n^2+8n+1) = \frac{8}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{2^{10n}} (820n^2+180n+13) = \frac{128}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^5 2^{4n}} (120n^2+34n+3) = \frac{32}{\pi^2}.$$

Como antes las demostraciones son casos particulares de algunas series generalizadas.

Todas estas series generalizadas comparten la importante propiedad de ser de las que pueden demostrarse de forma automática mediante el método WZ. El paquete EKHAD para Maple [21, Appendix A] programado por D. Zeilberger realiza el trabajo duro por lo que la demostración no ofrece ninguna dificultad. Esto podría dar la falsa impresión de que obtener series de este estilo resulta sencillo cuando sin embargo atinar con ellas ha sido fruto de una búsqueda experimental intensa utilizando diversas ideas programadas en Maple.

Inspirados por estas nuevas series y por la gran cantidad de series de tipo Ramanujan con z racional que existen para $1/\pi$, concluimos el capítulo utilizando el algoritmo PSLQ (un algoritmo numérico que encuentra relaciones enteras) [3], para ver si existen otras de la misma forma y encontramos cuatro series más:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 2^{10n}} (1640n^2+278n+15) = \frac{256\sqrt{3}}{3\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^5 48^{n}} (252n^2+63n+5) = \frac{48}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{8}\right)_n \left(\frac{3}{8}\right)_n \left(\frac{5}{8}\right)_n \left(\frac{7}{8}\right)_n}{n!^5 7^{4n}} (1920n^2+304n+15) = \frac{56\sqrt{7}}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 80^{3n}} (5418n^2+693n+29) = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}.$$

Naturalmente el método basado en el algoritmo PSLQ no proporciona una demostración pero nos da la fiabilidad de que las identidades son ciertas con la precisión elegida para hacer los cálculos que en nuestro caso ha sido de cientos de dígitos. Las cuatro nuevas fórmulas que hemos encontrado con este algoritmo permanecen sin demostración hasta la fecha.

En el **capítulo 2** modificamos los pares WZ, cuyas primeras componentes son las funciones $F(n,k)$ del capítulo 1, sumando a n la variable x, de forma que obtenemos pares WZ formados por las funciones $F(n+x,k)$ y $G(n+x,k)$. A estos nuevos pares les aplicamos el resultado [2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,0) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,k) + \sum_{k=0}^{\infty} F_x(0,k),$$

para demostrar identidades tales como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[6(n+x)+1] = 8x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(x+1)_n^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[42(n+x)+5] = 32x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(2x+1)_n^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[6(n+x)+1] = 4x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^2},$$

que extienden con la variable x las series de Ramanujan correspondientes a la parte binomial

$$B_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}.$$

Con el mismo método demostramos identidades que extienden con la variable x las series de Ramanujan correspondientes a las otras expresiones binomiales, como por ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{4}\right)_n \left(x+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^3}[20(n+x)+3] = 16x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n (2x+1)_n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{3n}}{2^{9n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{6}\right)_n \left(x+\frac{5}{6}\right)_n}{(x+1)_n^3}[154(n+x)+15] = 128x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n, (2x+1)_n}.$$

Del mismo modo demostramos identidades que extienden el nuevo tipo de series de Ramanujan que hemos descubierto. Damos dos ejemplos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^5}{(x+1)_n^5}[20(n+x)^2+8(n+x)+1] = 8x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^4}{(x+1)_n^4}(4n+2x+1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^5}{(x+1)_n^5}[820(n+x)^2+180(n+x)+13] = 128x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^4}{(2x+1)_n^4}(4n+6x+1).$$

Las fórmulas obtenidas suponen una clase de reducción para algunas series de Ramanujan extendidas con la variable x a series hipergeométricas más sencillas caracterizadas por un menor número de símbolos de Pochhammer.

La sustitución $x = 1/2$ en las identidades anteriores permite encontrar la suma de algunas series nuevas.

También demostramos identidades como las siguientes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[6(n+x)+1] = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4^x}{\cos^2 \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3} + \frac{16x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[42(n+x)+5] = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{64^x}{\cos^2 \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3} + \frac{128x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(2x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[6(n+x)+1] = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{8^x}{\cos \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3} + \frac{16x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}$$

que permiten encontrar desarrollos en series de potencias de x que inspiran las conjeturas del capítulo 3. Finalmente damos un ejemplo de otro tipo de fórmulas que hemos obtenido:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^5}{(x+1)_n^5}[820(n+x)^2+180(n+x)+13]$$

$$= \frac{8}{\pi} \cdot \frac{16^x}{\cos \pi x} \cdot \frac{1_x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[42(n+x)+5] + \frac{2048x^3}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n^3}{(2x+1)_n^2 \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}.$$

Este último tipo de identidades conecta de algún modo una extensión con la variable x de una serie de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$ con una extensión con la variable x de una serie de tipo Ramanujan para $1/\pi$.

En el **capítulo 3** enunciamos varias conjeturas, la primera de las cuales es:

Si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n) z^n (a+bn) = \frac{1}{\pi},$$

es de tipo Ramanujan para $1/\pi$, entonces existe un número racional positivo k, tal que

$$R(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a+b(n+x)] = \frac{1}{\pi} - \frac{k\pi}{2} x^2 + O(x^3).$$

Por ejemplo, obtenemos $k = 56$ para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} \frac{(-1)^n}{99^{4n}} \left(\frac{52780\sqrt{2}}{9801} n + \frac{2206\sqrt{2}}{9801} \right) = \frac{1}{\pi}.$$

Esta conjetura tiene la importante aplicación de que u, $B(n)$ y k determinan z, a y b resolviendo (numéricamente) las ecuaciones

$$R(0) = \frac{1}{\pi}, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) = -k\pi.$$

Para valores racionales de k, podemos usar las funciones *identify* ó *minpoly* para intentar reconocer los posibles valores algebraicos de z, a y b. Procediendo de la forma indicada identificamos con $k = 5$ la siguiente serie alternada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3} (17 - 12\sqrt{2})^n \left[2\sqrt{2} - \frac{5}{2} + (6\sqrt{2} - 6)n\right] = \frac{1}{\pi}.$$

Continuamos haciendo algunas observaciones experimentales que permiten simplificar la ecuación que determina z. Con esta ecuación simplificada la primera conjetura parece también cumplirse para todas las series de tipo Ramanujan-Sato. Por último, enunciamos una conjetura análoga a la dada para las series de tipo Ramanujan para $1/\pi$ pero ahora relativa a las series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$:

Si $u = 1$ ó $u = -1$, $0 < z < 1$ y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n) z^n (an^2 + bn + c) = \frac{1}{\pi},$$

es de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$, entonces existe un número racional k, tal que

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a(n+x)^2 + b(n+x) + c] = \frac{1}{\pi^2} - \frac{k}{2} x^2 + O(x^4).$$

Como en el caso anterior esta conjetura tiene la importante aplicación de que u, $B(n)$ y k determinan z, a, b y c resolviendo (numéricamente) las ecuaciones

$$R(0) = \frac{1}{\pi^2}, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) = -k, \quad R'''(0) = 0.$$

Para valores racionales de k, hemos usado las funciones *identify* or *minpoly* implementadas en Maple para intentar reconocer los posibles valores algebraicos de z, a, b y c. Nuestra esperanza era encontrar nuevas series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$ pero, a pesar de los muchos valores enteros de k que probamos, sólo hemos encontramos las mismas siete series para $1/\pi^2$ que aparecen en el capítulo 1, lo que contrasta con la enorme cantidad de series de tipo Ramanujan para $1/\pi$ que somos capaces de identificar.

En el **capítulo 4** algunas ideas del capítulo 3 junto con un resultado debido a H.H. Chan [10] y Y. Yang [25], que establece que si $u = 1$ ó $u = -1$, $0 < z < 1$ y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n (a + bn) = \frac{1}{\pi},$$

es de tipo Ramanujan-Sato, entonces existen unas funciones $z(q)$, $b(q)$ y $a(q)$, relacionadas con ciertas funciones modulares elípticas (funciones θ de Jacobi ó funciones η de Dedekind), tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n z(q)^n \{(a(q) + b(q)n\} = \frac{1}{\pi}, \qquad q = e^{-\pi\sqrt{N}}.$$

nos llevan a enunciar la conjetura siguiente:

Sean $S(z)$ y $W(z)$ las funciones definidas por

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \qquad W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n' z^n,$$

donde B_n' se obtiene derivando B_n con respecto a n como si se tratase de una variable continua, entonces $z(q)$ es la solución de la ecuación funcional

$$q = z \exp \frac{W(z)}{S(z)}$$

y las funciones $b(q)$ y $a(q)$ vienen dadas por

$$b = \sqrt{N} \frac{q}{zS} \frac{dz}{dq}, \qquad a = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{\pi} - \frac{q\sqrt{N}}{S} \frac{dS}{dq} \right].$$

Esta conjetura permite obtener los desarrollos en serie de potencias de q para $z(q)$ y $S(q)$ y por lo tanto también para $b(q)$ y $a(q)$. Finalmente usando técnicas experimentales intentamos reconocer las funciones modulares con las cuales las funciones $z(q)$, $b(q)$ y $a(q)$ están relacionadas.

Capítulo 1

Series de tipo Ramanujan

1.1. Introducción

Sea B_n una de las siguientes expresiones

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3},$$

donde $(a)_n$ es el factorial ascendente o símbolo de Pochhammer definido mediante

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

Si $u = 1$ o $u = -1$, entonces existen números algebraicos positivos $z < 1$, a y b, tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n z^n B_n(a+bn) = \frac{1}{\pi}.$$

Estas series se conocen como series de Ramanujan, quien en 1914 descubrió 17 de ellas [22].

La teoría de las funciones modulares elípticas constituye un marco adecuado en el que pueden demostrarse todas estas series de un modo unificado [7], [6] y [12]. Pero en este capítulo, en cambio, utilizaremos el método WZ para demostrar de forma sencilla unas pocas, concretamente 8, de entre las que tienen un valor racional de z. El método WZ tiene la ventaja de que cada demostración proporciona una fórmula generalizada y la desventaja de que hay que demostrar las fórmulas de una en una, con la dificultad que supone encontrar fórmulas generalizadas.

1.2. El método WZ

Decimos que una función discreta $A(n,k)$ es hipergeométrica ó forma cerrada [27] si los cocientes

$$\frac{A(n+1,k)}{n,k} \quad y \quad \frac{A(n,k+1)}{A(n,k)}$$

son ambos funciones racionales.

Y un par de funciones $F(n,k)$, $G(n,k)$ se dice que es de Wilf y Zeilberger (WZ) [21], [26] y [27] si F y G son formas cerradas y además

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

En este caso Wilf y Zeilberger han demostrado que el cociente entre las funciones $F(n,k)$ y $G(n,k)$ es una función racional, que recibe el nombre de certificado [26].

Si $F(n,k)$ es la primera componente de un par WZ entonces un paquete EKHAD para Maple creado por Zeilberger [21, Appendix A] permite encontrar su compañera. Las funciones $F(n,k)$ que vamos a considerar gozan de la importante propiedad $F(0,k) = 0$ lo que nos permite obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{G(n,k+1) - G(n,k)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\{F(n+1,k) - F(n,k)\} = -F(0,k) = 0,$$

que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k+1) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k).$$

Para las funciones que vamos a considerar un teorema de Carlson [4], y que enunciamos al final de la sección, permite a partir de la igualdad anterior obtener la todavía más general

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \text{Constante}.$$

(Es importante señalar que en algunos casos podemos llegar al resultado anterior sin necesidad de dicho teorema). De este modo sabemos como obtener a partir de la primera componente $F(n,k)$ de un par WZ la suma de la serie correspondiente a la segunda componente $G(n,k)$. Pero también podemos preceder en modo inverso: Dada una expresión como la sigue en la que $G(n,k)$ es hipergeométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \text{Constante}$$

el método WZ permite decidir si dicha expresión es una identidad. Para ello tendremos que obtener la compañera $F(n,k)$ de la función $G(n,k)$ lo que también puede hacerse con el paquete EKHAD intercambiando los papeles de n y k.

A partir de una primera componente $F(n,k)$ de un par WZ tal que satisface $F(0,k)=0$ podemos obtener otras con la misma propiedad mediante la transformación

$$F_{s,t}(n,k) = F(sn, k+tn)$$

siendo s un número natural (no incluimos el 0) y t un número entero. Además se cumple la fórmula todavía más general

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{s,t}(n,k) = \text{Constante},$$

siendo la constante independiente de los valores de k, s y t, con las restricciones de s y t mencionadas anteriormente.

Como vamos a usar con frecuencia los símbolos de Pochhammer es importante señalar que EKHAD no maneja directamente estos símbolos por lo que resulta necesario convertirlos a factoriales, es decir utilizando su definición general:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Sin embargo es posible obtener expresiones con factoriales más simplificadas que las que se derivan directamente aplicando la definición, una forma de conseguirlo es haciendo uso de las siguientes propiedades de los símbolos de Pochhammer:

$$(a+t)_n = \frac{(a)_{n+t}}{(a)_t}, \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{1}{j}\right)_n \left(\frac{2}{j}\right)_n \cdots \left(\frac{j-1}{j}\right)_n = \frac{1}{j^{jn}} \frac{(jn)!}{n!}, \quad j = 2, 3, \ldots. \tag{1.2}$$

En efecto, a partir de las equivalencias (1.1) y (1.2) podemos obtener equivalencias para expresiones que aparecen bien en los numeradores o en los denominadores de las funciones $F(n,k)$ utilizadas en este capítulo. Así, en los numeradores aplicaremos las equivalencias:

$$\left(\frac{1}{2}+k\right)_n = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n+2k)!k!}{(n+k)!(2k)!},$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)_n = \frac{1}{2^{6n}} \frac{(4n+2k)!k!}{(2n+k)!(2k)!},$$

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{3}\right)_n \left(\frac{5}{6}+\frac{k}{3}\right)_n = \frac{1}{2^{6n}\cdot 3^{3n}} \frac{(6n+2k)!k!}{(3n+k)!(2k)!}$$

y en los denominadores aplicaremos las equivalencias:

$$(1+k)_n = \frac{(n+k)!}{k!}, \qquad \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n+k)!}{k!}.$$

La sustitución de estas equivalencias en las correspondientes funciones $F(n,k)$ permite la conversión a símbolos factoriales de todas las funciones $F(n,k)$ utilizadas en este capítulo. Tiene importancia señalar que el paquete EKHAD opera simbólicamente y no numéricamente y que por lo tanto n y k son tratados formalmente como símbolos.

La idea de demostrar series de Ramanujan para $1/\pi$ utilizando el método WZ es original de Zeilberger quien demuestra la más sencilla de ellas

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(4n+1)=\frac{2}{\pi}.$$

En lo que sigue daremos dos demostraciones de la identidad anterior, una prácticamente igual a la de Zeilberger y otra a partir de un par WZ diferente. Además demostraremos otras 7 series de tipo Ramanujan para $1/\pi$ y tres series nuevas similares a las anteriores pero para la constante $1/\pi^2$. Las demostraciones que vamos a dar son sencillas, pero dependiendo del par utilizado requieren ó no del siguiente teorema

Teorema de Carlson *Si $f(z)$ es una función analítica, $f(z)=0$ para $z=0,1,2,\cdots$ y además $f(z)=O(e^{c|z|})$ para $c<\pi$ y $\Re(z)\geq 0$, entonces $f(z)=0$.*

que aplicaremos a funciones de la forma

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}G(n,z)-C,$$

con $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots=0$.

1.3. Demostraciones WZ de algunas series de Ramanujan

A continuación usamos el método WZ para obtener demostraciones sencillas de algunas series de tipo Ramanujan para $1/\pi$. Las demostraciones de la primera serie se exponen con todo detalle, las demás siguen el mismo esquema a partir de los pares formados por las funciones $F(n,k)$ y $R(n,k)$ indicadas. El interés que tiene dar varias demostraciones radica en el hecho de que además de aportar una demostración cada par WZ proporciona una serie generalizada diferente.

Serie 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(4n+1)=\frac{2}{\pi}.$$

Primera demostración

Consideramos la función

$$F(n,k) = (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1+k)_n^2 (1)_n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} \cdot 2n.$$

El paquete EKHAD certifica que dicha función es la primera componente de un par WZ y permite encontrar la función racional $R(n,k) = 4n + 2k + 1$ tal que

$$G(n,k) = (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1+k)_n^2 (1)_n} R(n,k) \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}}.$$

Aplicando el método WZ obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k+1)$$

y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k),$$

en caso de que el anterior límite exista. Observando que para la función $G(n,k)$ que nos concierne

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \lim_{k\to\infty} G(0,k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} (2k+1) = \frac{2}{\pi},$$

obtenemos la fórmula generalizada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1+k)_n^2 (1)_n} (4n+2k+1) \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} = \frac{2}{\pi},$$

válida para todo número real k no negativo. La fórmula de Ramanujan es el caso particular $k=0$. Obsérvese que esta demostración no requiere del teorema de Carlson.

Segunda demostración

Consideramos la función (equivalente a la utilizada [13] por Zeilberger)

$$F(n,k) = (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}-k\right)_n}{(1+k)_n (1)_n^2} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{n^2}{2n-2k-1}.$$

El paquete EKHAD certifica que dicha función es la primera componente de un par WZ y permite encontrar la función racional $R(n,k) = 4n + 1$ tal que

$$G(n,k) = (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}-k\right)_n}{(1+k)_n (1)_n^2} R(n,k) \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}.$$

Aplicando el método WZ y el teorema de Carlson [4], obtenemos la serie generalizada

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}-k\right)_n}{(1+k)_n (1)_n^2}(4n+1)\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{2}{\pi},$$

en la cual la constante se ha determinado sustituyendo el valor $k = 1/2$ y teniendo en cuenta las siguientes propiedades de los símbolos de Pochhammer:

$$(0)_0 = 1, \qquad (0)_n = 0 \quad \text{si} \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

La fórmula de Ramanujan es el caso particular $k = 0$.

Observación

Diremos, según expresión de Zeilberger, que las demostraciones anteriores están respectivamente encapsuladas en los siguientes pares:

Par 1.1

$$F(n,k) = (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1+k)_n^2 (1)_n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} \cdot 2n,$$

$$R(n,k) = 4n + 2k + 1.$$

Par 1.2

$$F(n,k) = (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}-k\right)_n}{(1+k)_n (1)_n^2} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{n^2}{2n-2k-1},$$

$$R(n,k) = 4n + 1.$$

En lo que sigue sólo indicaremos los pares a partir de los cuales se demuestran las series siguiendo según convenga el esquema de la primera demostración que no requiere el teorema de Carlson (para el primer par indicado en cada serie) ó el de la segunda que si requiere el teorema de Carlson (para el resto de los pares).

Serie 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(6n+1) = \frac{4}{\pi}.$$

Par 2.1

$$F(n,k) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1+k)_n^2 (1)_n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} \cdot 8n,$$

$$R(n,k) = 6n + 4k + 1.$$

Par 2.2

$$F(n,k) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1)_n^2 (1+k)_n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \frac{16n^2}{2n-2k-1},$$

$$R(n,k) = 6n + 2k + 1.$$

Serie 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(6n+1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Par 3.1

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+2k\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(1+k)_n^2 (1)_n} \frac{\binom{3k}{k}\binom{4k}{k}}{2^{6k}} \cdot 4n,$$

$$R(n,k) = 6n + 4k + 1.$$

Par 3.2

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2}{(1)_n^2 (1+k)_n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{3k}} \frac{16n^2}{2n-2k+1},$$

$$R(n,k) = 6n + 2k + 1.$$

Serie 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} (20n+3) = \frac{8}{\pi}.$$

<u>Par 4.1</u>

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1)_n (1+k)_n \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} \cdot 16n,$$

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)(20n+4k+3) - 16kn}{2n+k+1}.$$

<u>Par 4.2</u>

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}-\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)_n}{(1)_n^2 (1+k)_n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{64n^2}{4n-2k-1},$$

$$R(n,k) = 20n + 2k + 3.$$

<u>Par 4.3</u>

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)_n}{(1)_n^2 (1+k)_n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{4k}} \cdot \frac{48n^2}{2n-2k-1},$$

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)(20n+2k+3) - 24kn}{2n+1}.$$

Serie 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}(42n+5) = \frac{16}{\pi},$$

Par 5.1

$$F(n,k) = \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{\left(1+\frac{k}{2}\right)_n^2 \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^2 (1)_n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}} \cdot 32n,$$

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)^2(42n+4k+5) - 32kn(4n+3k+2)}{(2n+k+1)^2}.$$

Par 5.2

$$F(n,k) = \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2}{(1)_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{128n^2}{2n-2k-1},$$

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)(42n+2k+5) - 32kn}{2n+k+1}.$$

Serie 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{3n}}{2^{9n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3}(154n+15) = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}.$$

Par 6.1

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n 3^{3n}}{2^{9n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n \left(\frac{1}{2}+2k\right)_n}{(1)_n(1+k)_n \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \frac{\binom{3k}{k}\binom{4k}{k}}{2^{6k}} \cdot 128n$$

$$R(n,k) = \frac{(2n+4k+1)(154n+16k+15) - 384kn}{2n+k+1}.$$

Par 6.2

$$F(n,k) = (-1)^n \frac{3^{3n}}{2^{9n}} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\right)_n \left(\frac{5}{6}+\frac{k}{3}\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{3}\right)_n}{(1)_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{3k}} \cdot \frac{512n^2}{2n-2k-1},$$

$$R(n,k) = \frac{(2n+2k+1)(6n+2k+3)(154n+6k+15) - 32kn(38n+14k+19)}{3(2n+1)(2n+k+1)}.$$

Par 6.3

$$F(n,k) = (-1)^n \frac{3^{3n}}{2^{9n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2 \left(\frac{1}{6}-\frac{k}{3}\right)_n \left(\frac{5}{6}-\frac{k}{3}\right)_n \left(\frac{1}{2}-\frac{k}{3}\right)_n}{(1)_n^2 (1+k)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n^2} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{3k}} \cdot \frac{4n^2}{6n-2k-1},$$

$$R(n,k) = 154n + 22k + 15 + 4k\frac{2k^2-2nk+k+4n+2}{(2n+1)^2}.$$

Serie 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} (8n+1) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Par 7

$$F(n,k) = \frac{1}{3^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)_n \left(\frac{1}{4}-\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)_n}{(1)_n^2 (1+k)_n} \frac{3^k \binom{2k}{k}}{2^{4k}} \frac{36n^2}{4n-2k-1}$$

$$8n + 2k + 1.$$

Serie 8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}3^n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3} (28n+3) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}.$$

Par 8

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{4n}3^n} \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1)_n^2 \left(1+\frac{k}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n} \frac{3^k \binom{2k}{k}}{2^{4k}} \cdot \frac{96n^2}{2n-2k-1}$$

$$R(n,k)=\frac{(2n+2k+1)(28n+2k+3)-24kn}{2n+k+1}.$$

1.4. Series similares para $1/\pi^2$

En esta sección a partir de ciertos pares WZ descubrimos tres series similares a las de Ramanujan pero para la constante $1/\pi^2$. Las fórmulas se demuestran siguiendo el mismo esquema usado para la primera serie de la sección anterior por lo que sólo necesitamos indicar los pares formados por las funciones $F(n,k)$ y $R(n,k)$. Como en la sección anterior las únicas demostraciones que no requieren el teorema de Carlson son las correspondientes al primer par de cada serie.

Serie 9

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{n!^5}(20n^2+8n+1)=\frac{8}{\pi^2}.$$

Par 9.1

$$F(n,k)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{(1)_n(1+k)_n^4}\frac{\binom{2k}{k}^4}{2^{8k}}\cdot 8n(2n+4k+1),$$

$$R(n,k)=20n^2+8n+1+24kn+8k^2+4k.$$

Par 9.2

$$F(n,k)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3\left(\frac{1}{2}-k\right)_n\left(\frac{1}{2}+k\right)_n}{(1)_n^3(1+k)_n^2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}}\frac{32n^3}{2n-2k-1}$$

$$R(n,k)=20n^2+12kn+8n+2k+1.$$

Serie 10

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^5}(120n^2+34n+3)=\frac{32}{\pi^2}.$$

Par 10.1

$$F(n,k)=\frac{1}{2^{4n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^2}{(1)_n(1+k)_n^2\left(1+\frac{k}{2}\right)_n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^2}\frac{\binom{2k}{k}^4}{2^{8k}}\cdot 32n(4n+4k+1).$$

Como siempre, EKHAD permite obtener la función $R(n,k)$ pero no la mostramos aquí debido a su larga extensión.

Par 10.2

$$F(n,k)=\frac{1}{2^{4n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3\left(\frac{1}{4}-\frac{k}{2}\right)_n\left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)_n}{(1)_n^3(1+k)_n^2}\frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}}\cdot\frac{512n^3}{4n-2k-1}$$

$$R(n,k)=120n^2+84kn++34n+10k+3.$$

Serie 11

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{(1)_n^5}(820n^2+180n+13)=\frac{128}{\pi^2}.$$

Par 11.1

$$F(n,k)=\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^4}{\left(1+\frac{k}{2}\right)_n^4\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^4(1)_n}\frac{\binom{2k}{k}^4}{2^{8k}}\cdot 128n(6n+4k+1).$$

El paquete EKHAD permite obtener la componente $R(n,k)$ del par.

Par 11.2

$$F(n,k)=\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3\left(\frac{1}{2}-k\right)_n\left(\frac{1}{2}+k\right)_n^3}{(1)_n^3\left(1+\frac{k}{2}\right)_n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)_n^2}\frac{\binom{2k}{k}^3}{2^{6k}}\cdot\frac{2048n^3}{2n-2k-1}.$$

Con EKHAD determinamos la función $R(n,k)$.

Observación

Algunas de las funciones $F(n,k)$ que hemos considerado están relacionadas con otras mediante $F(n,k+n)$. En la tabla siguiente mostramos estas relaciones:

F(n, k)	1.2	2.2	2.1	4.2	7.1	9.1	10.2
F(n, k+n)	2.2	4.2	5.1	5.2	8.1	11.1	11.2

en la cual en las casillas indicamos los números de los pares a los que pertenecen.

1.5. El algoritmo PSLQ

Las tres series nuevas para $1/\pi^2$ que acabamos de demostrar nos hacen pensar que más fórmulas del mismo tipo podrían existir. La clase de fórmulas que tratamos de encontrar son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(n) z^n (an^2+bn+c) = \frac{d\sqrt{k}}{\pi^2} \tag{1.3}$$

con d, k, a, b y c enteros, $B(n)=n!^{-5}C(n)$ o $B(n)=(-1)^n n!^{-5}C(n)$, $C(n)$ es el producto 5 factoriales ascendentes de fracciones menores que la unidad y que satisfacen la siguiente condición: Para cada denominador en la fracción de un factorial ascendente debemos tener factoriales ascendentes con todas las posibles fracciones irreducibles correspondientes a dicho denominador. Teniendo esto en cuenta, tenemos los siguientes casos posibles para $C(n)$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{8}\right)_n\left(\frac{3}{8}\right)_n\left(\frac{5}{8}\right)_n\left(\frac{7}{8}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{5}\right)_n\left(\frac{2}{5}\right)_n\left(\frac{3}{5}\right)_n\left(\frac{4}{5}\right)_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{12}\right)_n\left(\frac{5}{12}\right)_n\left(\frac{7}{12}\right)_n\left(\frac{11}{12}\right)_n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{10}\right)_n\left(\frac{3}{10}\right)_n\left(\frac{7}{10}\right)_n\left(\frac{9}{10}\right)_n.$$

Para z consideramos casos tales como

$$z=\frac{1}{j^2}, \quad z=\frac{1}{j^2-1}, \quad z=\frac{1}{j^3}, \quad z=\frac{1}{(j^2-1)^3}, \quad z=\frac{1}{j^4},$$

siendo j un entero. El método que utilizamos para encontrar estas series se basa en el algoritmo PSLQ [3]. Mediante dicho algoritmo buscamos relaciones enteras entre

$$F_0=\sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n, \quad F_1=\sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n n, \quad F_2=\sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n n^2, \quad G=\frac{\sqrt{k}}{\pi^2}.$$

Esto significa que queremos encontrar unos números enteros a, b, c y d tales que $aF_0 + bF_1 + cF_2 + dG = 0, \quad d \neq 0$. Los algoritmos que resuelven este problema se conocen como *algoritmos de relaciones enteras*. El software que usamos para este propósito es PARI-GP, porque es muy rápido evaluando cálculos numéricos y además incluye la función LINDEP que encuentra los coeficientes de las relaciones enteras cuando estas existen. Para evitar la variable entera k, usamos también una variante de este método que consiste en encontrar relaciones enteras entre

$$F_0^2, \quad F_1^2, \quad F_2^2, \quad F_0F_1, \quad F_0F_2, \quad F_1F_2, \quad \frac{1}{\pi^4}.$$

Esta variante sería especialmente interesante si existieran fórmulas con valores grandes de k. Las fórmulas nuevas encontradas con los métodos numéricos explicados han sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 2^{10n}} (1640n^2+278n+15) = \frac{256\sqrt{3}}{3\pi^2}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^5 48^{n}} (252n^2+63n+5) = \frac{48}{\pi^2}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{8}\right)_n \left(\frac{3}{8}\right)_n \left(\frac{5}{8}\right)_n \left(\frac{7}{8}\right)_n}{n!^5 7^{4n}} (1920n^2+304n+15) = \frac{56\sqrt{7}}{\pi^2}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 80^{3n}} (5418n^2+693n+29) = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}. \tag{1.7}$$

Haciendo uso de la propiedad (1.2) en el caso particular $j = 6$:

$$\left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n = \frac{1}{6^{6n}} \frac{(6n)!}{n!},$$

obtenemos una expresión muy concisa para la última serie, a saber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{n!^6} \frac{(-1)^n}{2880^{3n}} (5418n^2+693n+29) = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}.$$

Una vez encontradas estas fórmulas con el software PARI GP hemos usado Maple para comprobar de nuevo si los resutados eran correctos. Los resultados numéricos muestran que por lo menos son ciertas hasta cientos de dígitos. Ahora examinamos las siguientes fórmulas de tipo Ramanujan [7], [12], [22]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3 48^n}(28n+3) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{n!^3 7^{4n}}(40n+3) = \frac{49\sqrt{3}}{9\pi}. \tag{1.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^3 80^{3n}}(5418n+263) = \frac{640\sqrt{15}}{3\pi}, \tag{1.10}$$

Es interesante observar que los números $48, 80^3, 7^4$ se repiten en los denominadores. Por el momento estas coincidencias resultan sorprendentes.

Capítulo 2

Identidades hipergeométricas

2.1. Introducción

Las identidades hipergeométricas que vamos a obtener se basan en la siguiente observación: Si F y G constituyen un par WZ entonces sabemos que se cumple la identidad

$$G(n, k+1) - G(n, k) = F(n+1, k) - F(n, k),$$

que obviamente se mantiene al sustituir el símbolo n por $n + x$:

$$G(n+x, k+1) - G(n+x, k) = F(n+x+1, k) - F(n+x, k).$$

De este modo, si denotamos $F_x(n, k) = F(n+x, k)$ y $G_x(n, k) = G_(n+x, k)$ resulta obvio que las funciones $F_x(n, k)$ y $G_x(n, k)$ forman un par WZ para cada valor de x y por lo tanto:

$$G_x(n, k+1) - G_x(n, k) = F_x(n+1, k) - F_x(n, k).$$

Sumando par $n \geq 0$ obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}[G_x(n, k+1) - G_x(n, k)] = \sum_{n=0}^{\infty}[F_x(n+1, k) - F_x(n, k)] = -F_x(0, k)$$

lo que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_x(n, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n, 1) + F_x(0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n, 2) + F_x(0, 1) + F_x(0, 0)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n, 3) + F_x(0, 2) + F_x(0, 1) + F_x(0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n, 4) + \sum_{k=0}^{3} F_x(0, k)$$

y continuando la recursión llegamos a [2]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,0) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,k) + \sum_{k=0}^{\infty} F_x(0,k),$$

que es el resultado que vamos a usar para obtener las identidades.

Las identidades que demostraremos en las dos secciones siguientes proceden de los mismos pares WZ expuestos en el capítulo anterior lo que nos permite asociar estas nuevas identidades a dichas series. En dichas secciones repetiremos de forma reiterada algunas frases lo cual queda justificado por el mismo argumento dado en el capítulo anterior, es decir para facilitar la precisión y la claridad en la exposición.

2.2. Primer grupo de identidades

Aplicamos a los pares WZ correspondientes a la sección 1.2 la estrategia explicada anteriormente. Una dificultad con la que nos encontramos consiste en determinar la función

$$S(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,k).$$

No hemos conseguido resolver dicha dificultad, pero recurriendo a métodos experimentales hemos reconocido dicha función a partir de la expresión

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,0) - \sum_{k=0}^{\infty} F_x(0,k)$$

calculada numéricamente para diversos valores de x.

Identidades asociadas a la serie 1

Sea f la función definida mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3} [4(n+x)+1].$$

A partir del Par 1.1 y haciendo uso de la estrategia explicada, obtenemos la identidad

$$f(x) = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+x\right)_n}{(x+1)_n^2} \tag{2.1}$$

y a partir del Par 1.2, obtenemos la identidad

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos \pi x} \cdot \frac{(1)_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3} + \frac{4x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \tag{2.2}$$

La identidad (2.1) implica la evaluación

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{G}$$

y (2.2) implica las evaluaciones

$$f(0) = \frac{2}{\pi}, \qquad f'(0) = \frac{12}{\pi} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{2}{\pi}\left(36 \ln^2 2 - 2\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^3}{(1)_{n+x}^3} \left[2(n+x) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{2} x^2 + O(x^3).$$

Identidades asociadas a la serie 2

Sea f la función definida mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3} [6(n+x)+1].$$

A partir del Par 2.1 y haciendo uso de la estrategia explicada, obtenemos la identidad

$$f(x) = 8x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(x+1)_n^2} \tag{2.3}$$

y a partir del Par 2.2, obtenemos la identidad

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4^x}{\cos^2 \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3} + \frac{16x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \tag{2.4}$$

De la identidad (2.3) se deduce

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

y (2.4) conduce a

$$f(0) = \frac{4}{\pi}, \qquad f'(0) = \frac{32}{\pi} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{4}{\pi}\left(64 \ln^2 2 - 3\pi^2\right)$$

y al desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^3}{(1)_{n+x}^3} \left[\frac{3}{2}(n+x) + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{\pi} - \pi x^2 + O(x^3).$$

Identidades asociadas a la serie 3

Sea f la función definida mediante:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3}[6(n+x)+1].$$

A partir del Par 3.1, obtenemos la identidad

$$f(x)=4x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^2} \tag{2.5}$$

y a partir del Par 3.2, obtenemos

$$f(x)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{8^x}{\cos\pi x}\cdot\frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3}+\frac{16x^2}{2x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(x+1)_n\left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \tag{2.6}$$

La identidad (2.5) implica el resultado

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4G$$

y (2.6) implica los valores

$$f(0)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\qquad f'(0)=\frac{18\sqrt{2}}{\pi}\ln 2,\qquad f''(0)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(81\ln^2 2-4\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^{n+x}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^3}{(1)_{n+x}^3}\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(n+x)+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]=\frac{1}{\pi}-\frac{3}{2}\pi x^2+O(x^3).$$

Identidades asociadas a la serie 4

Sea f la función definida mediante:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n\left(x+\frac{1}{4}\right)_n\left(x+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^3}[20(n+x)+3].$$

A partir del Par 4.1, obtenemos

$$f(x)=16x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n(2x+1)_n} \tag{2.7}$$

y a partir del par 4.3, obtenemos

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{4^x}{\cos \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x \left(\frac{1}{4}\right)_x \left(\frac{3}{4}\right)_x} + \frac{48x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n \left(2x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \qquad (2.8)$$

La identidad (2.7) implica

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 16 \ln 2$$

y (2.8) implica

$$f(0) = \frac{8}{\pi}, \qquad f'(0) = \frac{80}{\pi} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{8}{\pi} \left(100 \ln^2 2 - 5\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x} \left(\frac{1}{4}\right)_{n+x} \left(\frac{3}{4}\right)_{n+x}}{(1)_{n+x}^3} \left[\frac{5}{2}(n+x) + \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{3}{2}\pi x^2 + O(x^3).$$

Identidades asociadas a la serie 5

Sea f la función definida mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3} [42(n+x)+5].$$

A partir del Par 5.1, obtenemos la identidad

$$f(x) = 32x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(2x+1)_n^2} \qquad (2.9)$$

y a partir del Par 5.2, obtenemos la identidad

$$f(x) = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{64^x}{\cos^2 \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^3} + \frac{128x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(2x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \qquad (2.10)$$

La identidad (2.9) implica la evaluación

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8\pi^2}{3}$$

y (2.10) implica las evaluaciones

$$f(0) = \frac{16}{\pi}, \qquad f'(0) = \frac{192}{\pi} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{16}{\pi} \left(144 \ln^2 2 - 7\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{64^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^3}{(1)_{n+x}^3} \left[\frac{21}{8}(n+x) + \frac{5}{16}\right] = \frac{1}{\pi} - 3\pi x^2 + O(x^3).$$

Identidades asociadas a la serie 6

Sea f la función definida mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{3n}}{2^{9n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{6}\right)_n \left(x+\frac{5}{6}\right)_n}{(x+1)_n^3} [154(n+x)+15].$$

A partir del Par 6.1, obtenemos la identidad

$$f(x) = 128x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n (2x+1)_n}. \tag{2.11}$$

y a partir del Par 6.2, obtenemos

$$f(x) = \frac{32\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{512^x}{27^x \cdot \cos \pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x \left(\frac{1}{6}\right)_x \left(\frac{5}{6}\right)_x} + \frac{512x^2}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n \left(3x+\frac{1}{2}\right)_n}{(2x+1)_n \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}, \tag{2.12}$$

A partir de la identidad (2.11) se obtiene el valor

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 128 \ln 2$$

y a partir (2.12) obtenemos

$$f(0) = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}, \qquad f'(0) = \frac{480\sqrt{2}}{\pi} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{32\sqrt{2}}{\pi} \left(225 \ln^2 2 - 11\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 27^{n+x}}{512^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x} \left(\frac{1}{6}\right)_{n+x} \left(\frac{5}{6}\right)_{n+x}}{(1)_{n+x}^3} \left[\frac{77\sqrt{2}}{32}(n+x) + \frac{15\sqrt{2}}{64}\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{7}{2}\pi x^2 + O(x^3).$$

Identidad asociada a la serie 7

Sea f la función definida mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{4}\right)_n \left(x+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^3} [8(n+x)+1].$$

A partir del Par 7, obtenemos

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{9^x}{\cos 2\pi x} \cdot \frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x \left(\frac{1}{4}\right)_x \left(\frac{3}{4}\right)_x} + \frac{36x^2}{4x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n \left(\frac{3}{2}-2x\right)_n}. \tag{2.13}$$

La identidad (2.13) implica la evaluación

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot\pi$$

y también las siguientes evaluaciones

$$f(0) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, \qquad f'(0) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left(\ln 3 + 4\ln 2\right),$$

$$f''(0) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left(32\ln^2 2 + 2\ln^2 3 + 16\ln 3\ln 2 - 3\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}\left(\frac{1}{4}\right)_{n+x}\left(\frac{3}{4}\right)_{n+x}}{(1)_{n+x}^3}\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}(n+x) + \frac{\sqrt{3}}{6}\right] = \frac{1}{\pi} - 2\pi x^2 + O(x^3).$$

Identidad asociada a la serie 8

Sea f la función definida mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}\cdot 3^n} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n\left(x+\frac{1}{4}\right)_n\left(x+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^3}[28(n+x)+3].$$

A partir del Par 8, obtenemos la identidad

$$f(x) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}\cdot\frac{48^x}{\cos\pi x}\cdot\frac{1_x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)_x\left(\frac{1}{4}\right)_x\left(\frac{3}{4}\right)_x} + \frac{96x^2}{2x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n\left(2x+\frac{1}{2}\right)_n}{(2x+1)_n\left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \quad (2.14)$$

De la identidad (2.14) se deducen los siguientes valores

$$f(0) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}, \qquad f'(0) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}\left(\ln 3 + 12\ln 2\right),$$

$$f''(0) = \frac{16\sqrt{3}}{3\pi}\left(144\ln^2 2 + \ln^2 3 + 24\ln 3\ln 2 - 9\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{48^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}\left(\frac{1}{4}\right)_{n+x}\left(\frac{3}{4}\right)_{n+x}}{(1)_{n+x}^3}\left[\frac{7\sqrt{3}}{4}(n+x) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{7}{2}\pi x^2 + O(x^3).$$

2.3. Segundo grupo de identidades

Aplicamos a los pares WZ correspondientes a la sección 1.3 la estrategia explicada anteriormente. Una dificultad con la que nos encontramos consiste en determinar la función

$$S(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_x(n,k),$$

pero afortunadamente, para las identidades de esta sección, podemos conmutar el límite con la suma lo que nos permite obtener la función $S(x)$.

Identidades asociadas a la serie 9

Sean f y g las funciones definidas mediante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^5}{(x+1)_n^5} [20(n+x)^2 + 8(n+x) + 1],$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3} [6(n+x) + 1].$$

A partir del Par 9.1, obtenemos la identidad

$$f(x) = 8x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^4}{(x+1)_n^4} (4n + 2x + 1) \tag{2.15}$$

y a partir del Par 9.2, obtenemos

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos \pi x} \cdot \frac{1_x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^2} \cdot g(x) + \frac{32x^3}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)_n}{(x+1)_n^2 \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}, \tag{2.16}$$

La identidad (2.15) implica la evaluación

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 7\zeta(3)$$

y la identidad (2.16) junto con la identidad (2.4) implica las evaluaciones

$$f(0) = \frac{8}{\pi^2}, \qquad f'(0) = \frac{96}{\pi^2} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{64}{3\pi^2} \left(54 \ln^2 2 - \pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^5}{(1)_{n+x}^5} [20(n+x)^2 + 8(n+x) + 1] = \frac{8}{\pi^2} - 4x^2 + O(x^3). \tag{2.17}$$

Identidades asociadas a la serie 10

Sean f y g las funciones definidas mediante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(x+\frac{1}{4}\right)_n \left(x+\frac{3}{4}\right)_n}{(x+1)_n^5} [120(n+x)^2 + 34(n+x) + 3]$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3} [42(n+x) + 5].$$

A partir del Par 10.1, obtenemos

$$f(x) = 32x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)_n^2}{(x+1)_n^2 (2x+1)_n^2} (4n+4x+1) \tag{2.18}$$

y a partir del Par 10.2, obtenemos

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4^x \cdot \cos 2\pi x} \cdot \frac{1_x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)_x \left(\frac{3}{4}\right)_x} \cdot g(x) + \frac{512x^3}{4x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^2 \left(\frac{3}{2}-2x\right)_n} \tag{2.19}$$

La identidad (2.18) implica

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16\pi^2}{3}$$

y la identidad (2.19) junto con la identidad (2.10) implica

$$f(0) = \frac{32}{\pi^2}, \qquad f'(0) = \frac{512}{\pi^2} \ln 2, \qquad f''(0) = \frac{64}{3\pi^2} \left(384 \ln^2 2 - 7\pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^3 \left(\frac{1}{4}\right)_{n+x} \left(\frac{3}{4}\right)_{n+x}}{(1)_{n+x}^5} [120(n+x)^2 + 34(n+x) + 3] = \frac{32}{\pi^2} - 32x^2 + O(x^3). \tag{2.20}$$

Identidades asociadas a la serie 11

Sean f y g las funciones definidas mediante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^5}{(x+1)_n^5} [820(n+x)^2 + 180(n+x) + 13],$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6n}} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^3}{(x+1)_n^3} [42(n+x) + 5].$$

A partir del Par 11.1, obtenemos

$$f(x) = 128x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)_n^4}{(2x+1)_n^4}(4n+6x+1) \tag{2.21}$$

y a partir del Par 11.2, obtenemos

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{16^x}{\cos \pi x} \cdot \frac{1_x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)_x^2} \cdot g(x) + \frac{2048x^3}{2x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n^3}{(2x+1)_n^2 \left(\frac{3}{2}-x\right)_n}. \tag{2.22}$$

La identidad (2.21) implica la evaluación [2]:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 256\zeta(3).$$

La identidad (2.22) junto con la identidad (2.10) implica las evaluaciones

$$f(0) = \frac{128}{\pi^2}, \qquad f'(0) = \frac{2560}{\pi^2}\ln 2, \qquad f''(0) = \frac{2560}{3\pi^2}\left(60\ln^2 2 - \pi^2\right)$$

y el desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^5}{(1)_{n+x}^5}[820(n+x)^2 + 180(n+x) + 13] = \frac{128}{\pi^2} - 320x^2 + O(x^3). \tag{2.23}$$

2.4. Métodos experimentales

A continuación utilizamos algunos métodos experimentales para realizar algunas investigaciones relacionadas con las fórmulas obtenidas anteriormente.

Observación 1

Observamos en primer lugar que hemos obtenido la evaluación en forma cerrada de las funciones $f(x)$ consideradas en $x = 1/2$. Esto nos hace pensar que tal vez la evaluación de otras funciones $f(x)$ construidas de la misma forma a partir de otras series de Ramanujan también se puedan evaluar en forma cerrada. Sin embargo como no disponemos de los pares WZ necesarios para ello, recurrimos al algoritmo PSLQ, y curiosamente conseguimos evaluar todas las series que nos habíamos propuesto. Como sabemos el método seguido no proporciona una demostración por lo que los ejemplos que damos sólo pueden considerarse conjeturas.

Para las funciones $f(x)$ con $f(0) = 1/\pi$, construidas a partir de series de tipo Ramanujan correspondientes a partes binomiales B_n de las formas

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3},$$

hemos obtenido los siguientes resultados experimentales:

El valor $f(1/2)$ multiplicado por un adecuado factor algebraico siempre ha sido una combinación de logaritmos para las series alternadas y una combinación de arcos-tangentes en el caso de series de términos positivos.

Para las funciones $f(x)$ con $f(0) = 1/\pi^2$, construidas de la misma forma a partir de las nuevas series encontradas, correspondientes a partes binomiales que no repiten el factor $(1/2)_n$, hemos llegado a las mismas conclusiones.

En los ejemplos que vienen a continuación conseguimos evaluar, con ayuda del algoritmo PSLQ, la extensión de algunas series de tipo Ramanujan para el valor $x = 1/2$. Así, para la función

$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{882^2}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n\left(\frac{1}{4}+x\right)_n\left(\frac{3}{4}+x\right)_n}{(1+x)_n^3}[21460(n+x)+1123],$$

el algoritmo encuentra la evalución

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 + 10\ln 3 - 6\ln 7.$$

Obsérvese que 2, 3 y 7 son divisores de 882. Como segundo ejemplo para la función

$$f(x) = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{99^4}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n\left(\frac{1}{4}+x\right)_n\left(\frac{3}{4}+x\right)_n}{(1+x)_n^3}[26390(n+x)+1103],$$

encontramos el valor

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}\pi - 16\arctan\frac{\sqrt{2}}{2} - 24\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Obsérvese que $(\sqrt{2}-\ i)(\sqrt{2}+\ i) = 3$, que $(3-\sqrt{2}\ i)(3+\sqrt{2}\ i) = 11$, que 3 y 11 son divisores de 99 y que los argumentos de $(\sqrt{2}-\ i)$ y $(3-\sqrt{2}\ i)$ son $-\sqrt{2}/2$ y $-\sqrt{2}/3$ respectivamente. Sea ahora la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^3}{85^3}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n\left(\frac{1}{6}+x\right)_n\left(\frac{5}{6}+x\right)_n}{(1+x)_n^3}[1197(n+x)+72].$$

El algoritmo PSLQ sugiere que

$$\sqrt{3}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{8}\pi - 18\arctan\frac{1}{2} - 9\arctan\frac{1}{4}.$$

Partiendo ahora de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n\left(\frac{1}{3}+x\right)_n\left(\frac{2}{3}+x\right)_n}{(1+x)_n^3}[6(n+x)+1],$$

llegamos a

$$\sqrt{3} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}\pi - 9 \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como último ejemplo, para la función

$$f(x) = \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{80^3}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} B(n,x)[5418(n+x)^2 + 693(n+x) + 29],$$

con

$$B(n,x) = \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)_n \left(\frac{1}{3}+x\right)_n \left(\frac{2}{3}+x\right)_n \left(\frac{1}{6}+x\right)_n \left(\frac{5}{6}+x\right)_n}{(1+x)_n^5},$$

se tiene

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{333}{8} \ln 2 - \frac{243}{8} \ln 3 + \frac{45}{16} \ln 5.$$

Observación 2

En segundo lugar observamos que los desarrollos en serie (2.17), (2.23) y (2.20) se pueden mejorar, como se pone de manifiesto obteniendo los desarrollos correspondientes con coeficientes numéricos aproximados. De esta forma conjeturamos desarrollos que incluyen un término más:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^5}{(1)_{n+x}^5} [20(n+x)^2 + 8(n+x) + 1] = \frac{8}{\pi^2} - 4x^2 + O(x^4),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^5}{(1)_{n+x}^5} [820(n+x)^2 + 180(n+x) + 13] = \frac{128}{\pi^2} - 320x^2 + O(x^4),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^3 \left(\frac{1}{4}\right)_{n+x} \left(\frac{3}{4}\right)_{n+x}}{(1)_{n+x}^5} [120(n+x)^2 + 34(n+x) + 3] = \frac{32}{\pi^2} - 32x^2 + O(x^4).$$

Los desarrollos en serie obtenidos en este capítulo inspiran las conjeturas del próximo.

Capítulo 3

Generación de series

3.1. Introducción

La suposición de la veracidad de las conjeturas que vamos a exponer en este capítulo nos permite generar series para $1/\pi$ y $1/\pi^2$. Así, aplicando la primera conjetura (Conjetura 3.1) obtenemos series de tipo Ramanujan, es decir de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n z^n B(n)(a+bn) = \frac{1}{\pi},$$

siendo z, a y b números algebraicos positivos con $z < 1$ y $B(n)$ cualquiera de las cuatro posibilidades citadas en el capítulo 1. La Conjetura 3.2 se aplica también a las series de tipo Ramanujan pero además a las de tipo Ramanujan-Sato, que son series de misma forma pero asociadas a algunas sucesiones $B(n)$ especiales de números motivadas por [1], [11] y [25], por ejemplo a los números de Domb

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{2j}{j} \binom{2n-2j}{n-j}, \tag{3.1}$$

a los números de Apéry

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{j}^2, \tag{3.2}$$

a los números

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^2 \binom{2n-2j}{n-j}^2, \tag{3.3}$$

o a los números

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4. \tag{3.4}$$

La última conjetura (Conjetura 3.3) se aplica a las series del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n) z^n (a + bn + cn^2) = \frac{1}{\pi^2}, \tag{3.5}$$

siendo $u = 1$ o $u = -1$, z, a, b y c números algebraicos positivos con $z < 1$ y $B(n)$ cualquiera de las 14 posibilidades mostradas en el capítulo 1.
No hemos encontrado ninguna conjetura similar para el análogo de Ramanujan-Sato correspondiente a estas series, sin embargo dichas series existen ya que con el algoritmo PSLQ hemos encontrado la siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \sum_{j=0}^{n} \binom{2n-2j}{n-j}^2 \binom{2j}{j}^2 \frac{36n^2+12n+1}{2^{10n}} = \frac{32}{\pi^2},$$

que no ha sido demostrada hasta la fecha. Mejor todavía, W. Zudilin ha demostrado algunas series asociadas a otros tipos de números en [28] y [29].

Las Conjeturas 3.1 y 3.3 se inspiran en los desarrollos en serie del capítulo anterior y las hemos comprobado numéricamente en muchos ejemplos con una precisión de cientos de dígitos. La Conjetura 3.2 se inspira en la Conjetura 3.1 y en observaciones experimentales adicionales.

3.2. Un método para obtener series de Ramanujan

Conjetura 3.1 *Si $u = 1$ ó $u = -1$ y existen números algebraicos positivos $z < 1$, a y b para los cuales*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n) z^n (a + bn) = \frac{1}{\pi} \tag{3.6}$$

es una serie de Ramanujan entonces conjeturamos el siguiente desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x)] = \frac{1}{\pi} - \frac{k\pi}{2} x^2 + O(x^3), \tag{3.7}$$

en el cual $k = k(a, b, z)$ es un número racional positivo.

Si definimos la función

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x)],$$

entoces (3.7) implica que

$$k = \frac{-R''(0)}{\pi}$$

y podemos asociar este número racional rational k a cada serie de tipo Ramanujan. Por ejemplo, para las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{99^{4n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{2206\sqrt{2}}{9801} + \frac{52780\sqrt{2}}{9801} n \right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{7\sqrt{3}}{36} + \frac{17\sqrt{3}}{12} n \right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{8}\right)^{3n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{15\sqrt{2}}{64} + \frac{77\sqrt{2}}{32} n \right) = \frac{1}{\pi}.$$

obtenemos respectivamente $k = 56$, $k = 13/3$ y $k = 7$. Más aún, vamos a demostrar que u, $B(n)$ y k determinan todos los parámetros de una serie de tipo Ramanujan. Para ello escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x)] = a \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} + b \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x)$$

y definimos las funciones

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x}, \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x), \tag{3.8}$$

de tal forma que se verifica

$$R(x) = aS(x) + bT(x).$$

Entonces, haciendo uso de la Conjetura 3.1 obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS(0) + bT(0) & = & 1/\pi \\ aS'(0) + bT'(0) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Utilizando (3.7) y los valores para a y b obtenidos a partir del sistema (3.9) podemos obtener una ecuación

$$f(z) = k, \qquad \text{siendo} \qquad f(z) = \frac{-aS''(0)}{\pi} + \frac{-bT''(0)}{\pi}. \tag{3.10}$$

que relaciona z y k para cada parte binomial $B(n)$ y $u = 1$ ó $u = -1$. Mediante experimentación numérica hemos descubierto un algoritmo para resolver la ecuación (3.10): en primer lugar conseguimos una buena primera aproximación z_1 de z si en vez de $S(x)$ y $T(x)$ resolvemos la ecuación (3.10) usando las funciones $B(x)z^x$ y $B(x)z^x x$ obtenidas al tomar solamente los términos correspondientes a $n = 0$ en (3.8). Se tiene de este modo una ecuación de segundo grado en la variable $\ln(z)$ una de cuyas soluciones z_1 no es válida por ser mayor que la unidad. La otra solución la obtenemos más adelante a partir de una fórmula simplificada y es (3.21). Seguidamente usamos la fórmula

$$\frac{\ln z_n}{k_n} = \frac{\ln z_{n+1}}{k},$$

obtenida considerando una relación lineal entre k y $\ln z$. Ahora, para obtener mejores aproximaciones de z podemos usar la recurrencia

$$k_n = f(z_n), \qquad z_{n+1} = z_n^{k/k_n}. \tag{3.11}$$

Lo que nos interesa finalmente es reconocer el valor algebraico de z cuando k es un número racional. Así que, después de encontrar la aproximación numérica de z, intentamos reconocer su expresión algebraica. Las funciones *identify* [8] y *minpoly*, implementadas en Maple 9, son adecuadas para este propósito. Una vez hallado el valor de z, el sistema (3.9) nos permite obtener aproximaciones numéricas de a y b, y de nuevo tenemos que reconocer de que números algebraicos se trata. A continuación damos un ejemplo del procedimiento: Tomemos

$$u = 1, B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3},$$

entonces sustituyendo $k = 4$ en (3.10) y haciendo uso de la recurrencia (3.11) con el valor inicial, (obtenido como hemos explicado anteriormente)

$$z_1 = 256\ \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{6}},$$

obtenemos la siguiente sucesión de aproximaciones:

n	z_n	k_n	n	z_n	k_n
1	0.1164700015	3.923087536	6	0.1111111692	3.999999144
2	0.1116624439	3.991903391	7	0.1111111169	3.999999913
3	0.1111670393	3.999176679	8	0.1111111117	3.999999991
4	0.1111167760	3.999916585	9	0.1111111111	3.999999999
5	0.1111116848	3.999991552	10	0.1111111111	3.999999999

Fácilmente reconocemos que

$$z = 0{,}1111111111 \cdots = \frac{1}{9}.$$

Sustituyendo este valor en (3.9), obtenemos

$$a = 4{,}618802153517, \qquad \text{and} \qquad b = 0{,}577350269189$$

y la función *identify* [8] de Maple 9, identifica estas constantes como

$$a = \frac{8}{3}\sqrt{3}, \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{3.12}$$

En los ejemplos que vamos a dar usamos la función *identify* para reconocer las constantes: Así, si tomamos

$$u = 1, \qquad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3},$$

entonces para $k = 4$, obtenemos

$$z = 9 - 4\sqrt{5}, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5} - 22}, \quad \text{and} \quad b = \sqrt{20\sqrt{5} - 40}. \tag{3.13}$$

y si tomamos

$$u = -1, \qquad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3},$$

entonces para $k = 5$, obtenemos

$$z = 17 - 12\sqrt{2}, \quad a = 2\sqrt{2} - \frac{5}{2}, \quad \text{and} \quad b = 6\sqrt{2} - 6. \tag{3.14}$$

Para las series alternadas asociadas a $k = 15$, correspondientes a las partes binomiales

$$B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3},$$

obtenemos respectivamente los siguientes parámetros

$$z = \frac{1}{512}, \quad a = \frac{25}{192}\sqrt{6}, \quad b = \frac{57}{32}\sqrt{6} \tag{3.15}$$

y

$$z = \frac{1}{3024}, \quad a = \frac{13}{108}\sqrt{7}, \quad b = \frac{55}{36}\sqrt{7}. \tag{3.16}$$

Como último ejemplo mostramos las series de términos positivos correspondientes a $k = 8$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} (97 - 56\sqrt{3})^n \left(\sqrt{78\sqrt{3} - 135} + 6\sqrt{14\sqrt{3} - 24} \cdot n \right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{1}{81}\right)^n \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{20\sqrt{2}}{9} n \right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{13\sqrt{7} - 34}{54}\right)^n \left(\frac{7\sqrt{7} - 10}{27} + \frac{13\sqrt{7} - 7}{9} n \right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{4}{125}\right)^n \left(\frac{2\sqrt{15}}{25} + \frac{22\sqrt{15}}{25} n \right) = \frac{1}{\pi}.$$

Las soluciones en forma explícita de (3.9) son

$$a = \frac{1}{\pi} \frac{T'(0)}{S(0)T'(0) - S'(0)T(0)}, \qquad b = \frac{1}{\pi} \frac{-S'(0)}{S(0)T'(0) - S'(0)T(0)} \tag{3.17}$$

y sustituyendo estos valores en (3.10) obtenemos

$$\frac{S''(0) + k\pi^2 S(0)}{S'(0)} = \frac{T''(0) + k\pi^2 T(0)}{T'(0)}. \tag{3.18}$$

Ahora definimos el número N como

$$N := \left[\frac{S''(0) + k\pi^2 S(0)}{-2\pi S'(0)} \right]^2. \tag{3.19}$$

Experimentación numérica con muchos ejemplos revela que N y k guardan una sencilla relación que sólo depende de la parte binomial $B(n)$. Lo mostramos en la tabla siguiente

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3}$
$N = k + 1$	$N = k + 2$	$N = k + 4$	$N = k + \frac{4}{3}$

Observación directa, en muchos ejemplos, de los valores que se obtienen para N nos lleva a conjeturar que el número N es el que, en la teoría de funciones modulares elípticas aplicada a las series de Ramanujan [7], [10], se utiliza como como un parámetro para obtener las funciones $z = z(N)$, $a = a(N)$ y $b = b(N)$.

Los cálculos que vamos a realizar a continuación nos van a conducir a una ecuación más sencilla para obtener la solución de z. En efecto, a partir de (3.18) y (3.19), obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} S''(0) + k\pi^2 S(0) &= -2\pi\sqrt{N}S'(0) \\ T''(0) + k\pi^2 T(0) &= -2\pi\sqrt{N}T'(0). \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación con respecto a z y simplificando usando la segunda ecuación, obtenemos

$$\pi \frac{dk}{dz} S(0) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{dN}{dz} S'(0),$$

pero en los cuatro casos que relacionan N y k, tenemos

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dk}{dz},$$

lo que nos permite obtener

$$S'(0) = -\pi\sqrt{N}\, S(0), \tag{3.20}$$

y en lugar de (3.10) podemos usar esta ecuación más sencilla, (no involucra derivadas segundas), para obtener el valor de z correspondiente a una elección de u, $B(n)$ y N. Para obtener una primera aproximación de z, definimos la suma parcial $S_j(x)$ de $S(x)$

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} u^n B(n+x) z^{n+x},$$

y resolvemos la ecuación

$$S_0'(0) = -\pi\sqrt{N}\, S_0(0),$$

cuya solución es

$$z_1 = Me^{-\pi\sqrt{N}}, \tag{3.21}$$

siendo M los valores indicados en la tabla

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3}$
$M = 64$	$M = 256$	$M = 1728$	$M = 108$

Obtenemos cada vez mejores aproximaciones de z por medio de la recurrencia (3.11), o bien usando la recurrencia sugerida por (3.21):

$$N_n = f(z_n), \qquad z_{n+1} = M\left(\frac{z_n}{M}\right)^{\sqrt{N/N_n}},$$

siendo $f(z)$ la función

$$f(z) = N, \qquad \text{siendo} \qquad f(z) = \left[\frac{S'(0)}{-\pi S(0)}\right]^2.$$

Esto nos lleva a enunciar una conjetura que creemos que es válida no sólo para las series tipo de Ramanujan para $1/\pi$ sino también para cualquier serie de Ramanujan-Sato para $1/\pi$. Por este motivo posponemos su enunciado para la sección correspondiente a esta clase de series más general.

3.3. Un método para obtener series de Ramanujan-Sato

Para las series de Ramanujan para $1/\pi$ y también para las de Ramanujan-Sato si llamamos $B(n+x)$ a las funciones obtenidas reemplazando n por $n+x$ excepto en los símbolos sumatorios enunciamos la siguiente conjetura

Conjetura 3.2 *Para algunos números racionales N, la solución z de la ecuación*

$$f(z) = N, \qquad \text{siendo} \qquad f(z) = \left[\frac{S'(0)}{-\pi S(0)} \right]^2.$$

y los valores de a y b obtenidos sustituyendo dicho valor de z en las expresiones

$$a = \frac{1}{\pi} \frac{T'(0)}{S(0)T'(0) - S'(0)T(0)}, \qquad b = \frac{1}{\pi} \frac{-S'(0)}{S(0)T'(0) - S'(0)T(0)},$$

son números algebraicos positivos que sirven de parámetros para formar una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n z^n B(n)(a+bn) = \frac{1}{\pi}.$$

A continuación damos las series encontradas aplicando dicha conjetura para $N=3$ con $u=1$ y los números (3.3), para $N=38/5$ con $u=1$ y los números (3.4) y para $N=17/5$ con $u=-1$ y los números (3.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^2 \binom{2n-2j}{n-j}^2 \left(\frac{2-\sqrt{3}}{64} \right)^n \left(\frac{1}{4} + \frac{3+2\sqrt{3}}{4} n \right) = \frac{1}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4 \frac{1}{76^{2n}} \left(\frac{47\sqrt{95}}{1444} + \frac{102\sqrt{95}}{361} n \right) = \frac{1}{\pi}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4 \frac{(-1)^n}{18^{2n}} \left(\frac{4\sqrt{5}}{27} + \frac{68\sqrt{5}}{81} n \right) = \frac{1}{\pi}.$$

Series para $1/\pi$ asociadas a los números de Domb (4.5) y a los números de Apèry (4.7) han sido estudiadas y demostradas en [10] y [23], respectivamente. Y. Yang ha demostrado las evaluaciones de algunas series para $1/\pi$ asociadas a los números (3.4).

3.4. Un método para obtener series para $1/\pi^2$

Conjetura 3.3 *Si $u = 1$ ó $u = -1$ y existen números algebraicos positivos $z < 1$, a, b y c para los cuales*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n) z^n (a + bn + cn^2) = \frac{1}{\pi^2}, \tag{3.22}$$

es una serie de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$ entonces conjeturamos el siguiente desarrollo en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x) + c(n+x)^2] = \frac{1}{\pi^2} - \frac{k}{2} x^2 + O(x^4). \tag{3.23}$$

en el cual $k = k(z, a, b, c)$ es un número racional positivo.

Si definimos la función

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x) + c(n+x)^2],$$

entonces (3.23) implica que

$$k = -R''(0),$$

y podemos asociar este número racional positivo k a cada serie de la forma (3.22). Más aún, vamos a demostrar que u, $B(n)$ y k determinan todos los parámetros de esta clase de series. Para ello escribimos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x) + c(n+x)^2] \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} + b \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x) + c \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x)^2, \end{aligned}$$

y definimos las funciones

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x},$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x), \qquad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x)^2,$$

de forma que se tiene

$$R(x) = aS(x) + bT(x) + cU(x).$$

A partir de (3.23) obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS(0)+bT(0)+cU(0) & = & 1/\pi^2 \\ aS'(0)+bT'(0)+cU'(0) & = & 0 \\ aS'''(0)+bT'''(0)+cU'''(0) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.24}$$

Usando (3.23) y los valores para a, b y c obtenidos a partir del sistema (3.24), obtenemos una ecuación

$$f(z)=k, \qquad \text{siendo} \qquad f(z)=-aS''(0)-bT''(0)-cU''(0), \tag{3.25}$$

que relaciona z con k para cada parte binomial $B(n)$ y $u=1$ o $u=-1$. La ecuación (3.25) se puede resolver del mismo modo que (3.10), pero esta vez la primera aproximación $\ln z_1$ para el $\ln z$ es una solución de una ecuación de tercer grado. La recurrencia (3.11) se puede usar de nuevo para obtener z numéricamente cuando seleccionamos un valor de k. Lo que nos interesa en definitiva es reconocer z cuando k es un número racional. Así que, después de encontrar la aproximación numérica de z, intentamos identificar su expresión algebraica. Una vez averiguado el valor de z, el sistema (3.24) nos permite obtener los valores de a y b, y de nuevo debemos intentar reconocer estos números. Damos un ejemplo del procedimiento: Tomemos

$$u=-1, \qquad B(n)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{(1)_n^5}, \qquad k=5.$$

Para resolver la ecuación (3.25) tomamos como valor inicial z_1, la única solución más pequeña que la unidad de la ecuación de tercer grado en $\ln z$ (obtenida en la forma explicada anteriormente)

$$\ln^3 z - 30\ln 2 \ln^2 z + (300\ln^2 2 - 20\pi^2)\ln z + [200\pi^2 \ln 2 - 1000\ln^3 2 - 60\zeta(3)] = 0.$$

Usando la recurrencia (3.11), obtenemos la siguiente sucesión de mejores y mejores aproximaciones

n	z_n	k_n	n	z_n	k_n
1	0.000976266984418	5.00027949591	10	0.000976562503147	4.99999999702
2	0.000976645321010	4.99992168497	11	0.000976562499118	5.00000000083
3	0.000976539294280	5.00002194447	12	0.000976562500247	4.99999999977
4	0.000976569002482	4.99999385104	13	0.000976562499931	5.00000000007
5	0.000976560677972	5.00000172298	14	0.000976562500019	4.99999999998
6	0.000976563010544	4.99999951721	15	0.000976562499995	5.00000000001
7	0.000976562356942	5.00000013528	16	0.000976562500002	5.00000000000
8	0.000976562540086	4.99999996209	17	0.000976562500000	5.00000000000
9	0.000976562488768	5.00000001062	18	0.000976562500000	5.00000000000

y fácilmente reconocemos que

$$z = 0{,}0009765625 = \frac{1}{1024}.$$

Sustituyendo este valor en (3.24), obtenemos

$$a = 0{,}101562500000, \qquad b = 1{,}406250000000, \quad \text{and} \quad c = 6{,}406250000000,$$

y de nuevo, fácilmente reconocemos que

$$a = \frac{13}{128}, \quad b = \frac{180}{128}, \quad \text{and} \quad c = \frac{820}{128},$$

que es precisamente una de las series para $1/\pi^2$ demostradas en el capítulo 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{(1)_n^5} (820n^2 + 180n + 13) = \frac{128}{\pi^2}.$$

Las otras dos series demostradas en dicho capítulo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{n!^5} (20n^2 + 8n + 1) = \frac{8}{\pi^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^5} (120n^2 + 34n + 3) = \frac{32}{\pi^2}$$

corresponden a los valores $k = 1$ y $k = 2$ respectivamente.

A continuación exponemos las otras series encontradas al realizar una búsqueda con los valores $k = 1, 2, 3, \ldots, 50$:

Con $k = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{n!^5 48^n} (252n^2 + 63n + 5) = \frac{48}{\pi^2}.$$

Con $k = 7$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 2^{10n}} (1640n^2 + 278n + 15) = \frac{256\sqrt{3}}{3\pi^2}.$$

Con $k = 8$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{8}\right)_n \left(\frac{3}{8}\right)_n \left(\frac{5}{8}\right)_n \left(\frac{7}{8}\right)_n}{n!^5 7^{4n}} (1920n^2 + 304n + 15) = \frac{56\sqrt{7}}{\pi^2}.$$

Con $k = 15$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!^5 80^{3n}} (5418n^2 + 693n + 29) = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}.$$

Todas estas series ya han sido encontradas en el capítulo 1 utilizando el algoritmo PSLQ. Resulta extraño que con el nuevo método, basado en la Conjetura 3.3, no hayamos sido capaces de identificar ninguna serie no encontrada ya en dicho capítulo.

3.5. El coeficiente del término siguiente

En algunos casos hemos sido también capaces de identificar el coeficiente del siguiente término en el desarrollo de la serie de tipo Ramanujan para $1/\pi$ extendida con la variable x, con ayuda de la función

$$\sigma_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2},$$

que se relaciona con la función dilogarítmica

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

por medio de

$$\sigma_2(x) = \Im(\mathrm{Li}_2(e^{ix})).$$

En los ejemplos que vamos a dar usamos la siguiente notación

$$B_1(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad B_2(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}, \qquad B_3(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3}.$$

Caso 1: Cuando z, a y b son racionales encontramos que el coeficiente del término siguiente es un múltiplo racional de la constante de Catalan $G = \sigma_2(\pi/2)$. Dos ejemplos son

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_1(n+x)}{64^{n+x}} \left[\frac{5}{16} + \frac{42}{16}(n+x) \right] = \frac{1}{\pi} - 3\pi x^2 + 64Gx^3 + O(x^4),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_2(n+x)}{18^{2n+2x}} \left[\frac{23}{72} + \frac{65}{18}(n+x) \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{11\pi}{2} x^2 + 160Gx^3 + O(x^4).$$

Caso 2: Si z, $a\sqrt{3}$ y $b\sqrt{3}$ son racionales encontramos que el coeficiente del término siguiente es un múltiplo racional de la constante $A = \sigma_2(\pi/3)$. Damos dos ejemplos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2(n+x)}{7^{4n+4x}} \left[\frac{59\sqrt{3}}{49} + \frac{120\sqrt{3}}{49}(n+x) \right] = \frac{1}{\pi} - 8\pi x^2 + 120Ax^3 + O(x^4),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_3(n+x)}{16^{n+x}} \left[\frac{7\sqrt{3}}{36} + \frac{17\sqrt{3}}{12}(n+x) \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{13\pi}{6} x^2 + 20Ax^3 + O(x^4).$$

Caso 3: Cuando z, $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$ son racionales encontramos que el coeficiente del siguiente término es un múltiplo racional de la constante $B = \sigma_2(\pi/4) - G/4$. Dos ejemplos son

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_1(n+x)}{8^{n+x}} \left[\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}(n+x) \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{3\pi}{2} x^2 + 32Bx^3 + O(x^4),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2(n+x)}{99^{4n+4x}} \left[\frac{2206\sqrt{2}}{9801} + \frac{52780\sqrt{2}}{9801}(n+x) \right] = \frac{1}{\pi} - 28\pi x^2 + 1920 B x^3 + O(x^4).$$

En general si tenemos dos series de Ramanujan con parámetros z, a, b y z', a' y b', tales que z/z', a/a' y b/b' son números racionales, entonces descubrimos mediante experimentación numérica que también lo es el cociente de los coeficientes correspondientes a los términos de tercer orden.

Para todas las series encontradas de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$ hemos sido también capaces de identificar el siguiente término en el desarrollo de la serie extendida con x, en este caso como un múltiplo racional de la constante π^2. Algunos ejemplos son

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+x}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^5}{(1)_{n+x}^5} \left(\frac{1}{8} + (n+x) + \frac{5}{2}(n+x)^2 \right) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{25\pi^2}{24}x^4 + O(x^5),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10(n+x)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+x}^5}{(1)_{n+x}^5} \left(\frac{13}{128} + \frac{45}{32}(n+x) + \frac{205}{32}(n+x)^2 \right) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{305\pi^2}{24}x^4 + O(x^5),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_1(n+x)}{48^{n+x}} \left(\frac{5}{48} + \frac{21}{16}(n+x) + \frac{21}{4}(n+x)^2 \right) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{157\pi^2}{24}x^4 + O(x^5),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2(n+x)}{7^{4(n+x)}} \left(\frac{15\sqrt{7}}{392} + \frac{38\sqrt{7}}{49}(n+x) + \frac{240\sqrt{7}}{49}(n+x)^2 \right) = \frac{1}{\pi^2} - 4x^2 + \frac{124\pi^2}{3}x^4 + O(x^5),$$

donde $B_1(n+x)$ y $B_2(n+x)$ se obtienen reemplazando n con $n+x$ en las expresiones binomiales:

$$B_1(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^5} \qquad \text{y} \qquad B_2(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{8}\right)_n \left(\frac{3}{8}\right)_n \left(\frac{5}{8}\right)_n \left(\frac{7}{8}\right)_n}{(1)_n^5}.$$

Capítulo 4

Familias de series

4.1. Introducción

La sucesión de números enteros

$$B_n = \frac{(2n)!^3}{n!^6} = 2^{6n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3}, \tag{4.1}$$

satisface la siguiente recurrencia

$$n^3 B_n - 8(2n-1)^3 B_{n-1} = 0.$$

Otras sucesiones de números enteros que satisfacen una recurrencia de primer orden cuyos coeficientes son polinomios de tercer grado:

$$B_n = \frac{(4n)!}{n!^4} = 2^{8n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}, \tag{4.2}$$

$$B_n = \frac{(2n)!(3n)!}{n!^5} = 2^{2n}3^{3n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3}, \tag{4.3}$$

y

$$B_n = \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3} = 2^{6n}3^{3n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}, \tag{4.4}$$

satisfacen las recurrencias

$$n^3 B_n - 8(2n-1)(4n-3)(4n-1)B_{n-1} = 0,$$

$$n^3 B_n - 6(2n-1)(3n-2)(3n-1)B_{n-1} = 0$$

y

$$n^3 B_n - 24(2n-1)(6n-5)(6n-1)B_{n-1} = 0,$$

respectivamente. Ejemplos de sucesiones de enteros que satisfacen una recurrencia de segundo orden con polinomios de tercer grado como coeficientes [1] son: La sucesión de los números de Domb [10]

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{2j}{j} \binom{2n-2j}{n-j}, \tag{4.5}$$

que satisface

$$n^3 B_n - 2(2n-1)(5n^2-5n+2)B_{n-1} + 64(n-1)^3 B_{n-2} = 0, \tag{4.6}$$

la sucesión de los números de Apèry

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{j}^2 \tag{4.7}$$

que satisface

$$n^3 B_n - (2n-3)(17n^2-17n+5)B_{n-1} + (n-1)^3 B_{n-2} = 0,$$

así como las sucesiones

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4 \tag{4.8}$$

y

$$B_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} 3^{n-3j} \binom{n}{3j} \binom{n+j}{j} \frac{(3j)!}{j!^3}, \tag{4.9}$$

que satisfacen recurrencias similares. Nuestro interés en las sucesiones de enteros B_n, que satisfacen una recurrencia con polinomios de tercer grado como coeficientes, proviene del hecho de que para algunas de ellas [1] existen números algebraicos $-1 < z < 1$, $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n (a + bn) = \frac{1}{\pi}. \tag{4.10}$$

En este capítulo estamos considerando uz como una única variable z con $-1 < z < 1$. Los números (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) son precisamente los correspondientes a las series de Ramanujan (obsérvese que se modifica la variable z de la serie). Los números (4.5), (4.7), (4.8) y (4.9) corresponden a series de Ramanujan-Sato. Otros números [1], asociados también a series de Ramanujan-Sato se usarán en los ejemplos de la sección 4.3.

A cada sucesión B_n asociamos una sucesión D_n, que llamaremos sucesión derivada de B_n, definida mediante

$$D_n = B'_n = \frac{dB_n}{dn},$$

donde d/dn significa que diferenciamos respecto de n como si se tratase de una variable continua. A partir de la recurrencia de B_n podemos obtener otra para D_n. Por ejemplo, la recurrencia (4.6) para los números de Domb (4.5) puede ser escrita en la forma

$$B_n = 2\frac{(2n-1)(5n^2-5n+2)}{n^3}B_{n-1} - 64\frac{(n-1)^3}{n^3}B_{n-2}$$

y diferenciando respecto de n, como si n fuera una variable continua, obtenemos

$$D_n = 2\frac{(2n-1)(5n^2-5n+2)}{n^3}D_{n-1} - 64\frac{(n-1)^3}{n^3}D_{n-2} +$$

$$6\frac{5n^2-6n+2}{n^4}B_{n-1} - 192\frac{(n-1)^2}{n^4}B_{n-2}.$$

A partir de las condiciones iniciales $B_0 = 1$ y $D_0 = 0$, obtenemos

$$B_1 = 4B_0 + 0B_{-1} = 4, \qquad D_1 = 4D_0 + 0D_{-1} + 6B_0 + 0B_{-1} = 6 \tag{4.11}$$

y con estos valores y usando las recurrencias, determinamos $B_2, B_3, \dots$ y $D_2, D_3, \dots$.

4.2. Fórmulas y conjeturas

En esta sección damos un método y dos conjeturas que nos permitirán obtener fórmulas explícitas para los parámetros correspondientes a familias de series de Ramanujan-Sato para $1/\pi$. Estas fórmulas involucran la función η de Dedekind

$$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+1}),$$

o bien las funciones θ de Jacobi

$$\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{n^2}, \quad \theta_4(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2}.$$

En los desarrollos que siguen supondremos la veracidad de la Conjetura 3.2. En dicho capítulo habíamos definido las funciones

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x}, \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x}(n+x).$$

Ahora efectuamos el siguiente cambio de notación, en el cual como ya no aparece la variable x vamos a hacer explícita la dependencia respecto de la variable z que es lo que ahora nos interesa:

$$S(0) = S(z), \qquad S'(0) = V(z).$$

Es evidente que con esta notación se tiene que

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \tag{4.12}$$

y resulta sencillo comprobar que

$$T(0) = z\frac{dS}{dz}, \qquad T'(0) = z\frac{dV}{dz}$$

y también que

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dn}(B_n z^n).$$

La ecuación del capítulo anterior:

$$S'(0) = -\pi\sqrt{N}\; S(0),$$

se convierte con el cambio de notación en

$$V(z) = -\pi\sqrt{N}\; S(z). \tag{4.13}$$

Motivados por la teoría de las funciones modulares introducimos ahora la variable

$$q = e^{-\pi\sqrt{N}}. \tag{4.14}$$

Definimos la nueva función $W(z)$ en la forma

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dB_n}{dn} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n$$

que se relaciona con $V(z)$ mediante

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dn}(B_n z^n) = W(z) + \ln(z) S(z).$$

y obtenemos la siguiente ecuación que relaciona z y q

$$q = z \exp \frac{W(z)}{S(z)}. \tag{4.15}$$

Si escribimos z como una serie de potencias de q

$$z = \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^4 + \cdots . \tag{4.16}$$

entonces, los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lim_{z\to 0}\frac{z}{q},\\
\alpha_2 &= \lim_{z\to 0}\frac{z-\alpha_1 q}{q^2},\\
\alpha_3 &= \lim_{z\to 0}\frac{z-\alpha_1 q-\alpha_2 q^2}{q^3}.\\
&\vdots
\end{aligned}\tag{4.17}$$

Del mismo modo, si escribimos S como una serie de potencias de q

$$S = 1+\beta_1 q+\beta_2 q^2+\beta_3 q^3+\beta_4 q^4+\cdots, \tag{4.18}$$

los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \lim_{z\to 0}\frac{S-1}{q},\\
\beta_2 &= \lim_{z\to 0}\frac{S-1-\beta_1 q}{q^2},\\
\beta_3 &= \lim_{z\to 0}\frac{S-1-\beta_1 q-\beta_2 q^2}{q^3}.\\
&\vdots
\end{aligned}\tag{4.19}$$

En el capítulo anterior hemos obtenido el sistema

$$\begin{cases} aS(0)+bT(0) &= 1/\pi \\ aS'(0)+bT'(0) &= 0. \end{cases}$$

que con el cambio de notación que hemos realizado se convierte en

$$\begin{cases} aS+bz\dfrac{dS}{dz} &= \dfrac{1}{\pi} \\ \\ aV+bz\dfrac{dV}{dz} &= 0. \end{cases}\tag{4.20}$$

A partir de (4.13) y de la segunda ecuación de (4.20), obtenemos

$$a(\ln q)S+bz\frac{d}{dz}\left[(\ln q)S\right]=0. \tag{4.21}$$

y usando (4.21), encontramos

$$a(\ln q)S+bz\left[\frac{1}{q}\left(\frac{dz}{dq}\right)^{-1}S+(\ln q)\frac{dS}{dz}\right]=0. \tag{4.22}$$

A partir de (4.22) y de la primera ecuación de (4.20) obtenemos la siguiente fórmula que nos permite determinar el parámetro b

$$\frac{b}{\sqrt{N}} = \frac{q}{zS}\frac{dz}{dq}. \tag{4.23}$$

Usando la primera ecuación en (4.20), obtenemos la siguiente fórmula para el parámetro a

$$a = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{\pi} - bz\frac{dS}{dz}\right) = \frac{1}{S}\left[\frac{1}{\pi} - bz\frac{dS}{dq}\left(\frac{dz}{dq}\right)^{-1}\right],$$

que, con ayuda de (4.23), nos da

$$a = \frac{1}{S}\left[\frac{1}{\pi} - \frac{q\sqrt{N}}{S}\frac{dS}{dq}\right], \tag{4.24}$$

que nos permite determinar el parámetro a.

Conjetura 4.1 *Los coeficientes de (4.16) y (4.18), dados por (4.17) y (4.19), son todos números enteros y z y S son el producto de un número finito de funciones $\eta(q)$, $\eta(q^2)$, $\eta(q^3)$, $\cdots$, siendo η la función de Dedekind definida por:*

$$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+1}).$$

Además, para algunos valores racionales de N, z es un número algebraico.

Conjetura 4.2 *Sustituyendo los valores de z y S en (4.23) y (4.24) obtenemos valores para a y b tales que se cumple la identidad siguiente*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n (a+bn) = \frac{1}{\pi}. \tag{4.25}$$

Además, para los valores racionales de N para los cuales z es un número algebraico, los parámetros a y b son también números algebraicos.

4.3. Ejemplos

Mediante las conjeturas que acabamos de enunciar vamos a obtener ejemplos de familias de Ramanujan-Sato.

Ejemplo 4.1 Consideramos la sucesión de números:

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^2 \binom{2n-2j}{n-j}^2.$$

Los números B_n se obtienen de forma recursiva a partir de la condición inicial $B_0 = 1$ y de la ecuación recurrente

$$B_n = 8\frac{(2n-1)(2n^2-2n+1)}{n^3}B_{n-1} - 256\frac{(n-1)^3}{n^3}B_{n-2}.$$

Aunque se trata de una recurrencia de segundo orden, podemos obtener B_1 como en (4.11). La sucesión derivada D_n satisface la condición inicial $D_0 = 0$ y la recurrencia

$$D_n = 8\frac{(2n-1)(2n^2-2n+1)}{n^3}D_{n-1} - 256\frac{(n-1)^3}{n^3}D_{n-2} +$$

$$8\frac{6n^2-8n+3}{n^4}B_{n-1} - 768\frac{(n-1)^2}{n^4}B_{n-2}$$

y de nuevo, obtenemos D_1 como en (4.11). Siguiendo el método descrito en la sección 4.2, obtenemos

$$z = q - 8q^2 + 44q^3 - 192q^4 + 718q^5 - 2400q^6 + 7352q^7 - 20992q^8 + \cdots,$$

$$S = 1 + 8q + 24q^2 + 32q^3 + 24q^4 + 48q^5 + 96q^6 + 64q^7 + 28q^8 + \cdots.$$

Estos desarrollos corresponden a las funciones [24, A005798 y A000118]

$$z = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = \frac{\lambda^*(q)^2}{16}, \tag{4.26}$$

$$S = \theta_3^4(q), \tag{4.27}$$

siendo $\theta_2(q)$ y $\theta_3(q)$ funciones theta de Jacobi y $\lambda^*(q)$ la función elíptica módulo lambda, definida por

$$\lambda^*(q) = \frac{\theta_2^2(q)}{\theta_3^2(q)}.$$

Sustituyendo en (4.12) los valores dados en (4.26) y (4.27), obtenemos la fórmula

$$\theta_3^4(q) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)}\right)^n.$$

Sustituyendo (4.26) y (4.27) en (4.23) y desarrollando en serie de potencias de q, obtenemos

$$\frac{b}{\sqrt{N}} = 1 - 16q + 128q^2 - 704q^3 + 3072q^4 - 11488q^5 + 38400q^6 - \cdots.$$

que corresponde a la función [24, A128692]

$$\frac{b}{\sqrt{N}} = 1 - \frac{\theta_2^4(q)}{\theta_3^4(q)} = 1 - \lambda^*(q)^2 = \frac{\theta_4^4(q)}{\theta_3^4(q)}. \tag{4.28}$$

Sustituyendo (4.27) en (4.24), obtenemos

$$a = \frac{\frac{1}{\pi} - 4\sqrt{N}q\frac{1}{\theta_3(q)}\frac{d\theta_3(q)}{dq}}{\theta_3^4(q)} = \alpha(-q)[1 - \lambda^*(q)^2], \tag{4.29}$$

donde $\alpha(q)$ es la función elíptica alpha, definida por

$$\alpha(q) = \frac{\frac{1}{\pi} - 4\sqrt{N}q\frac{1}{\theta_4(q)}\frac{d\theta_4(q)}{dq}}{\theta_3^4(q)}.$$

Sustituyendo en (4.25) los valores de los parámetros dados en (4.26), (4.28) y (4.29), obtenemos la siguiente fórmula

$$\frac{1}{\pi} = [1 - \lambda^*(q)^2] \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{\lambda^*(q)^2}{16}\right)^n \left[\alpha(-q) + \sqrt{N}n\right],$$

donde $q = e^{-\pi\sqrt{N}}$ ó $q = -e^{-\pi\sqrt{N}}$.

Ejemplo 4.2 Consideramos los números definidos por la recurrencia $B_0 = 1$ y

$$B_n = 4\frac{(2n-1)(3n^2-3n+1)}{n^3}B_{n-1} - 16\frac{(n-1)^3}{n^3}B_{n-2}.$$

Los números derivados D_n satisfacen la recursión $D_0 = 0$ y

$$D_n = 4\frac{(2n-1)(3n^2-3n+1)}{n^3}D_{n-1} - 16\frac{(n-1)^3}{n^3}D_{n-2} +$$

$$4\frac{9n^2-10n+3}{n^4}B_{n-1} - 48\frac{(n-1)^2}{n^4}B_{n-2}.$$

Siguiendo el método descrito en la sección 4.2, obtenemos

$$z = q - 8q^2 + 28q^3 - 64q^4 + 142q^5 - 352q^6 + 792q^7 - 1536q^8 + 2917q^9 - 5744q^{10} + \cdots$$

y

$$S = 1 + 4q + 8q^2 + 16q^3 + 24q^4 + 24q^5 + 32q^6 + 32q^7 + 24q^8 + 52q^9 + 48q^{10} \cdots .$$

El anterior desarrollo corresponde a la función [24, A097057]

$$S = \theta_3^2(q)\theta_3^2(q^2). \tag{4.30}$$

Usando el paquete para Maple *q-series* [14], concretamente las funciones *prodmake* y *etamake*, encontramos que

$$z = q\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n+1}}{1-q^{8n+4}}\right)^8 = \left[\frac{\eta(q^8)}{\eta(q^2)}\frac{\eta(q)}{\eta(q^4)}\right]^8. \tag{4.31}$$

A partir de las identidades [14]

$$\begin{aligned}
\theta_2(q) &= 2\frac{\eta^2(q^4)}{\eta(q^2)}, \\
\theta_3(q) &= \frac{\eta^5(q^2)}{\eta^2(q^4)\,\eta^2(q)}, \\
\theta_4(q) &= \frac{\eta^2(q)}{\eta(q^2)},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

podemos obtener

$$\eta(q) = \left[\frac{1}{2}\theta_2(q)\theta_3(q)\theta_4^4(q)\right]^{1/6}, \tag{4.33}$$

que permiten convertir fórmulas que usan la función η de Dedekind en fórmulas que utilizan las funciones de Jacobi θ_2, θ_3 y θ_4. A partir de (4.31) y utilizando (4.33), podemos expresar z por medio de funciones θ. Una fórmula más simplificada es

$$z = \left[\frac{\theta_2(q^2)}{\theta_2(q)}\frac{\theta_4(q)}{\theta_4(q^2)}\right]^4, \tag{4.34}$$

que se puede obtener usando la primera y la tercera de las identidades (4.32). Sustituyendo (4.30) y (4.34) en (4.12), obtenemos la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left[\frac{\theta_2(q^2)}{\theta_2(q)}\frac{\theta_4(q)}{\theta_4(q^2)}\right]^{4n} = \theta_3^2(q)\theta_3^2(q^2).$$

Tomando el logaritmo de (4.31) y derivando respecto de q, obtenemos

$$\frac{q}{z}\frac{dz}{dq} = 1 + 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} - 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8n+4)q^{8n+4}}{1-q^{8n+4}}. \tag{4.35}$$

A partir de la fórmula (3.2.24) de [7] y de las identidades $\theta_4(-q) = \theta_3(q)$ y $\theta_2^4(-q) = -\theta_2^4(q)$, obtenemos

$$\theta_2^4(q) + \theta_3^4(q) = 1 + 24 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}},$$

que nos permite escribir (4.35) usando las funciones θ de Jacobi:

$$\frac{q}{z}\frac{dz}{dq} = \frac{4\theta_2^4(q^4) + 4\theta_3^4(q^4) - \theta_2^4(q) - \theta_3^4(q)}{3}. \tag{4.36}$$

Sustituyendo (4.30) y (4.36) en (4.23), obtenemos

$$\frac{b}{\sqrt{N}} = \frac{4\theta_2^4(q^4) + 4\theta_3^4(q^4) - \theta_2^4(q) - \theta_3^4(q)}{3\theta_3^2(q)\theta_3^2(q^2)}. \tag{4.37}$$

Sustituyendo (4.30) en (4.24), obtenemos

$$a = \frac{\dfrac{1}{\pi} - 2\sqrt{N}q\left(\dfrac{1}{\theta_3(q)}\dfrac{d\theta_3(q)}{dq} + \dfrac{1}{\theta_3(q^2)}\dfrac{d\theta_3(q^2)}{dq}\right)}{\theta_3^2(q)\theta_3^2(q^2)}. \tag{4.38}$$

Sustituyendo en (4.25) los valores de los parámetros z, b y a dados por (4.34), (4.37) y (4.38), obtenemos una familia de series para $1/\pi$.

Ejemplo 4.3 Consideramos los números definidos en forma recursiva mediante $B_0 = 1$ y

$$B_n = 3\frac{(2n-1)(3n^2-3n+1)}{n^3}B_{n-1} + 27\frac{(n-1)^3}{n^3}B_{n-2}.$$

Los números derivados D_n satisfacen la recurrencia $D_0 = 0$ y

$$D_n = 3\frac{(2n-1)(3n^2-3n+1)}{n^3}D_{n-1} + 27\frac{(n-1)^3}{n^3}D_{n-2} +$$

$$3\frac{9n^2-10n+3}{n^4}B_{n-1} + 81\frac{(n-1)^2}{n^4}B_{n-2}.$$

Siguiendo el método de la sección 4.2, obtenemos

$$\begin{aligned} z &= q - 6q^2 + 9q^3 + 22q^4 - 102q^5 + 108q^6 + 221q^7 - 858q^8 + 810q^9 + \\ &\quad 1476q^{10} - 5262q^{11} + 4572q^{12} + 7802q^{13} - 26112q^{14} + 21519q^{15} + \cdots \end{aligned}$$

y

$$S = 1 + 3q + 9q^2 + 12q^3 + 21q^4 + 18q^5 + 36q^6 + 24q^7 + 45q^8 + 12q^9 + \cdots$$

Usando el paquete para Maple *q-series* [14], concretamente las funciones *prodmake* y *etamake*, encontramos que

$$z = q \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1})^6(1-q^{9n+9})^6}{(1-q^{3n+3})^{12}} = \left[\frac{\eta(q)\,\eta(q^9)}{\eta^2(q^3)}\right]^6 \tag{4.39}$$

y

$$S = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{3n+3})^{10}}{(1-q^{n+1})^3(1-q^{9n+9})^3} = \frac{\eta^{10}(q^3)}{\eta^3(q)\,\eta^3(q^9)}. \tag{4.40}$$

Las expresiones de z y S nos permiten escribir la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\frac{\eta(q)\,\eta(q^9)}{\eta^2(q^3)}\right]^{6n} = \frac{\eta^{10}(q^3)}{\eta^3(q)\,\eta^3(q^9)}.$$

Y sustituyendo en

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \left[\frac{1}{S}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{q\sqrt{N}}{S}\frac{dS}{dq}\right) + \frac{q\sqrt{N}}{zS}\frac{dz}{dq}n\right] = \frac{1}{\pi}$$

los valores de z y S dados en (4.39) y (4.40), obtenemos otra familia de series para $1/\pi$.

Ejemplo 4.4 Parece ser que la Conjetura 4.1 (pero no la Conjetura 4.2) es también cierta cuando consideramos ciertas sucesiones de enteros que satisfacen recurrencias cuyos coeficientes son polinomios de segundo grado [1]. Como ejemplo consideramos la sucesión de enteros [1]

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$

Esta sucesión satisface la recurrencia $B_0 = 1$ y

$$B_n = \frac{4(3n^2-3n+1)}{n^2}B_{n-1} - \frac{32(n-1)^2}{n^2}B_{n-2}.$$

Los números derivados D_n satisfacen la ecuación recursiva $D_0 = 0$ y

$$D_n = \frac{4(3n-2)}{n^3}B_{n-1} - \frac{64(n-1)}{n^3}B_{n-2} +$$

$$\frac{4(3n^2-3n+1)}{n^2}D_{n-1} - \frac{32(n-1)^2}{n^2}D_{n-2}.$$

Siguiendo el procedimiento explicado, obtenemos

$$z = q - 4q^2 + 12q^3 - 32q^4 + 78q^5 - 176q^6 + 376q^7 - 768q^8 + 1509q^9 - 2872q^{10} + \cdots$$

y

$$S = 1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + 8q^5 + 4q^8 + 4q^9 + 8q^{10} + \cdots .$$

Los desarrollos anteriores corresponden a las funciones [24, A107035 y A004018]

$$z = \left[\frac{\eta^2(q^8)}{\eta(q^4)}\right]^2 \left[-\frac{\eta(q^2)}{\eta^2(-q)}\right]^{-2} = \frac{\theta_2^2(q^2)}{4\theta_3^2(q)}$$

y

$$S = \theta_3^2(q),$$

lo que nos permite escribir la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\frac{\theta_2^2(q^2)}{4\theta_3^2(q)}\right]^n = \theta_3^2(q).$$

Bibliografía

[1] G. Almkvist, W. Zudilin, *Differential equations, mirror maps and zeta values*, accepted for publication in the Proceedings of the BIRS workshop Çalabi–Yau Varieties and Mirror Symmetry"(Banff, December 6–11, 2003), J. Lewis, S.-T. Yau and N. Yui (eds.), International Press & American Mathematical Society, 44 pages.

[2] T. Amdeberhan and D. Zeilberger, *Hypergeometric Series Acceleration via the WZ Method*, Electronic J. Combinatorics 4, (1997).

[3] D. H. Bailey, *Integer relation detection and lattice reduction*. Computing in Science and Engineering. To appear

[4] W.N. Bailey. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Univ. Press, p. 39, (1935).

[5] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, Pi: A Source Book, Springer-Verlag, (1997, 2000).

[6] B. C. Berndt and H. H. Chan. *Eisenstein Series and Aproximation to* π. Illinois Journal of Mathematics, 45, pp. 75-90, (2001).

[7] J. M. Borwein, P. B. Borwein, Pi and the AGM. Wiley Interscience, (1987).

[8] P. B. Borwein, K. G. Hare, and A. Meichsner, *Reverse Symbolic computations, the identify function*, Preprint.

[9] H. H. Chan, W. C. Liaw and V. Tan, *Ramanujan's class invariant* λ_n *and a new class of series for* $1/\pi$. Journal of the London Mathematical Society, 64, pp. 93-106, (2001).

[10] H. H. Chan, S. H. Chan, and Z. Liu, *Domb's numbers and Ramanujan-Sato type series for* $1/\pi$. Advances in Mathematics, 186, pp. 396-410, (2004).

[11] H. H. Chan, *Some new identities involving* π, $1/\pi$ *and* $1/\pi^2$. Unpublished paper. Available from World Wide Web (http://ww1.math.nus.edu.sg/AMC/papers-invited/Chan-HengHuat.pdf).

[12] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *Approximations and Complex Multiplication According to Ramanujan.* In Ramanujan Revisited: Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois at Urbana-Champaign, June 1-5, 1987 (Ed. G. E. Andrews, B. C. Berndt, and R. A. Rankin). Boston, MA: Academic Press, pp. 375-472, (1987).

[13] S. B. Ekhad and D. Zeilberger, *A WZ proof of Ramanujan's formula for* π, Geometry, Analysis and Mechanics. ed. by J. M. Rassias, World Scientific, Singapore (1994).

[14] F. Garvan, *A q-product tutorial for a q-series Maple package*. Available from World Wide Web (http://www.mat.univie.ac.at/ slc/wpapers/s42garvan.pdf).

[15] J. Guillera *Some binomial series obtained by the WZ-method*. Advances in Applied Mathematics, 29, pp. 599-603, (2002).

[16] J. Guillera *Generators of Some Ramanujan Formulas.* The Ramanujan Journal 11 (2006), 41-48.

[17] J. Guillera *About a new kind of Ramanujan type series*. Experimental Mathematics, 12, pp. 507-510, (2003).

[18] J. Guillera *Hypergeometric identities for* 10 *extended Ramanujan type series*. The Ramanujan Journal, (to appear).

[19] J. Guillera *A new method to obtain series for* $1/\pi$ *and* $1/\pi^2$. Experimental Mathematics, 15, pp. 83-89, (2006).

[20] J. Guillera *A class of conjectured series representations for* $1/\pi$. Experimental Mathematics, 15, pp. 409-414, (2006).

[21] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, A.K. Peters Ltd., (1996).

[22] S. Ramanujan, *Modular equations an approximations to* π, *Quarterly Journal of Mathematics*, 45 pp. 350-372, (1914).

[23] T. Sato, *Apéry numbers and Ramanujan's series for* $1/\pi$. Abstract of a talk presented at *The Annual meeting of the Mathematical Society of Japan*, March 28-31, 2002.

[24] N. Sloane, *The on-line Enciclopedia of Integer Sequences*. Available from World Wide Web (http://www.research.att.com/ñjas/sequences/).

[25] Y. Yang, *On differential equations satisfied by modular forms*, Mathematische Zeitschrift, 246 pp 1-19, (2004).

[26] H.S. Wilf, D. Zeilberger, *Rational functions certify combinatorial identities*, Journal A.M.S. 3, (1990).

[27] D. Zeilberger, *Closed-Form (pun intended!)*, Contemporary Mathematics 143, (1993).

[28] W. Zudilin, *Quadratic transformations and Guillera's formulae for* $1/\pi^2$. Matematicheskie Zametki **81**, (2007), págs. 335-340 (versión en ruso). Mathematical Notes **81**, (2007). (Por aparecer).

[29] W. Zudilin, *More Ramanujan-type formulae for* $1/\pi^2$. En preparación.