EXTRACCION DE BUENAS SUBSUCESIONES EN RETICULOS DE FUNCIONES Y APLICACIONES A LA ESTABILIDAD

por

Jesús Bastero
Yves Raynaud

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXXX, cuaderno 1.° y 2.°)

MADRID - 1986

*Extracción de buenas subsucesiones en retículos de funciones y aplicaciones a la estabilidad**

Por JESÚS BASTERO** e YVES RAYNAUD***

Abstract

In this paper we present a subsequence splitting lemma in r.i. spaces which permit us to prove the stability of the space $L(E)$, where L is a r.i. stable Banach lattice and E is a stable Banach space.

En este trabajo presentamos un lema de extracción de buenas subsucesiones en retículos de funciones r.i. (invariantes por reordenaciones en el espacio de medida) que permite dar otra demostración de la estabilidad de los espacios L^p, L^M, $L^{p,q}$, así como probar la estabilidad de los retículos de funciones vectoriales $L(E)$. Los resultados que aquí aparecen pueden contrastarse con los de [B], [B-M], [K-M] y [R].

Las definiciones y notaciones sobre retículos que aquí se utilizan son las que aparecen en [L-Tz]. Recordemos que un espacio de Banach es estable (según [K-M]) si

$$\lim_{n\,\mathcal{U}} \lim_{m\,\mathcal{V}} \|x_n + y_m\| = \lim_{m\,\mathcal{V}} \lim_{n\,\mathcal{U}} \|x_n + y_m\|$$

para todo par de suciones acotadas (x_n), (y_m) del espacio y para todo par de ultrafiltros no triviales $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{N}$.

Supondremos que L es un retículo r.i. sobre $[0, 1]$, que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0.

Lema. Sea (f_n) una sucesión acotada de L, entonces existe una subsucesión (f_n') y una sucesión de subconjuntos medibles de $[0, 1]$, (A_n), tales que: i) $(f_n'\chi_{A_n})$ es equintegrable, ii) $m(A_n^c) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Además, si la sucesión (f_n) está acotada en norma L^∞, existe una función $\varphi \in L$ tal que $\lim_{n\,\mathcal{U}} \|f_n + g\| = \|\varphi + g\|$ uniformemente en $g \in \mathcal{G}$, siendo $\mathcal{G}$ el subespacio de funciones de L con soporte disjunto a todas las f_n.

En [J-M-S-T] hay un lema similar a la primera parte del enunciado anteriormente, que es válido para retículos de funciones, pero sustituyendo el ser r.i. y el no contener a c_0 por la condición de poseer un cotipo finito.

---

† La investigación del primer autor subvencionada por la CAICYT, n.º 0804-84.

* Presentada en la sesión científica de 7 de mayo de 1986.

** Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

*** Université Paris VII. UER de Mathématique et Informatique.

Como consecuencia de este lema probaremos la estabilidad de L^M, espacio de Orlicz de funciones para M función convexa, verificando la condición Δ_2.

Sean (f_n) y (g_m) sucesiones acotadas en L^M. Por aplicación del lema, por la equiintegrabilidad y dado un $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\lim_{n\mathcal{U}} \lim_{m\mathcal{V}} \|f_n + g_m\| \overset{\varepsilon}{=} \lim_{n\mathcal{U}} \lim_{m\mathcal{V}} \|(f_n\chi_{A_n} + g_m\chi_{B_m}) \dot{+} f_n\chi_{A_n^c} \dot{+} g_m\chi_{B_m^c}\|_{L^M}$$

$$(\text{sumas disjuntas}) = \lim_{n\mathcal{U}} \lim_{m\mathcal{V}} \|\varphi \dot{+} f_n\chi_{A_n^c} \dot{+} g_m\chi_{B_m^c}\| =$$

$$= \inf\left\{\rho > 0; \int M\left(\frac{|\varphi|}{\rho}\right) dw + \lim_{n\mathcal{U}} \int M\left(\frac{|f_n\chi_{A_n^c}|}{\rho}\right) + \lim_{m\mathcal{V}} \int M\left(\frac{|g_m\chi_{B_m^c}|}{\rho}\right) \leqslant 1\right\}$$

lo que implica la estabilidad de L^M. Notemos que se pueden introducir los límites dentro del ínfimo gracias a que podemos suponer que $\int M\left(\frac{|\varphi|}{\rho}\right) dw$ es una función estrictamente creciente en ρ. La función φ que aparece no depende de la inversión de los límites, gracias a la estabilidad en ley de la aplicación

$$B_{L^x} \times B_{L^y} \rightarrow \mathbb{P}[0, 2] : (f, g) \rightarrow \pi_{|f+g|}$$

Para los espacios $L^{p,q}$ la demostración de la estabilidad puede hacerse de un modo análogo, usando una descomposición asintótica de la norma.

Proposición. Si L es estable y E es un espacio de Banach estable, entonces el espacio $L(E) = \{F\colon [0, 1] \rightarrow E$, medibles Bochner, $f(.) = \|F(.)\|_E \in L\}$, provisto de la norma $\|F\| = \|f\|_L$ es también estable.

(Esta proposición contiene como casos particulares las correspondientes de [K-M] y [R].)

La demostración de esta proposición sigue los pasos de la antes indicada para L^M, con los retoques que aparecen al considerar normas en lugar de módulos y utilizando la estabilidad en ley de la aplicación $B_{L^1(E)} \times B_{L^1(E)} \rightarrow \mathbb{P}[0, 2]$ dada por $(F, G) \rightarrow \pi_{\|F+G\|}$ (ver [R]), asi como la estabilidad de L.

BIBLIOGRAFIA

[B] BASTERO, J.: «Embedding unconditional stable Banach spaces into symmetric stable Banach spaces», *Israel J. Mat.*, **53** (3), 373-380 (1986).

[B-M] BASTERO, J., y MIRA, J. M.: «Stability of vector valued Banach sequence spaces», *Bull. Acad. Sc. Pol.*, **34** (1-2), 47-53 (1986).

[K-M] KRIVINE, J., y MAUREY, B.: *Espaces de Banach stables*. Israel J. of Math. 39(4) (1981) 273-295.

[J-M-S-T] JOHNSON, W., y otros: *Symmetric structures in Banach spaces*. Memoirs A.M.S., 217.

[L-Tz] LINDENSTRAUSS, J., y TZAFRIRI, L.: *Classical Banach spaces II*, Springer, 1979.

[R] RAYNAUD, Y.: *Sur la propieté de stabilité pour les espaces de Banach*, These 3ème cicle. Paris VII (1981).